

Homework 2

SNU 4190.310, 2024 봄

이 광근

Due: 3/25(월), 24:00

Exercise 1 “Mathemadiga”

고등학교때는 손으로하고, Maple이나 Mathematica에서는 자동으로 해주던 미분식 전개를 만들어봅시다.

```
diff: ae * string -> ae
```

diff는 식(algebraic expression)과 변수를 받아서 주어진 식을 변수로 미분한 결과 식을 돌려 줍니다. 예를들어, 식 $ax^2 + bx + c$ 을 x 에 대해 미분시키면 $2ax + b$ 를 내 놓는 것입니다. 미분된것을 될 수 있으면 최소의 꼴로 줄이거나 등등의 작업을 하는 것은 자유입니다. 미분할 식은 다음의 ae 타입입니다:

```
type ae = CONST of int
        | VAR of string
        | POWER of string * int
        | TIMES of ae list
        | SUM of ae list
```

이때 TIMES 또는 SUM 의 인자에 빈 리스트가 있으면 없는 항으로 취급합니다.

□

Exercise 2 “CheckMetroMap”

아래 metro 타입을 생각하자:

```
type metro = STATION of name
           | AREA of name * metro
           | CONNECT of metro * metro
and name = string
```

아래 checkMetro 함수를 정의하라:

```
checkMetro: metro -> bool
```

checkMetro는 주어진 metro 가 제대로 생겼는지를 확인해 준다. “metro가 제대로 생겼다”는 것은(iff) 메트로 역 이름(id in STATION(id))들이 항상 자기 이름의 지역(m in AREA(id , m))에서만 나타나는 경우를 뜻한다.

예를들어, 제대로 생긴 metro 들은:

- AREA("a", STATION "a")
- AREA("a", AREA("a", STATION "a"))
- AREA("a", AREA("b", CONNECT(STATION "a", STATION "b")))
- AREA("a", CONNECT(STATION "a", AREA("b", STATION "a")))

그렇지 못한 것들의 예들은:

- AREA("a", STATION "b")
- AREA("a", CONNECT(STATION "a", AREA("b", STATION "c")))
- AREA("a", AREA("b", CONNECT(STATION "a", STATION "c")))

□

Exercise 3 “우선큐”

“우선큐”(priority queue)라는 구조는 원소들 사이의 순위가 “입장 순이 아니라 능력 순”이라는 것입니다. 원소들이 들어온 순서를 기준으로 우선순위가 매겨지지 (예, 스택이나 큐) 않고 원소마다 고유의 우선순위가 지정되는 것입니다.

우선큐는 대개 원소를 넣고 빼는 것 보다는, 제일가는 원소를 알아보는 데에 유난히 특화됩니다. 힙(heap)이 대표적인 구현방법입니다. 그중에서도 왼쪽으로 쏠린 힙(leftist heap, 왼쪼힙)이라는 것을 구현해 봅시다.

- 왼쪼힙: 힙은 힙인데 모든 왼쪽 노드의 급수가 오른쪽 형제 노드의 급수보다 크거나 같다.
- 노드의 급수: 그 노드에서 오른쪽으로만 타고 내려가서 끝날 때 까지 내려선 횟수, 즉 오른쪽편 척추의 길이.
- 힙: 이진 나무 구조로서 모든 갈래길 길목의 값이 갈라진 후의 모든 노드들의 값보다 작거나 같다.

왼쪼힙은 다음의 타입으로 정의됩니다:

```
type heap = EMPTY | NODE of rank * value * heap * heap
and rank = int
and value = int
```

넣고, 빼고, 하는 등의 함수는 다음으로 정의됩니다:

```
exception EmptyHeap

let rank h = match h with
  | EMPTY -> -1
  | NODE(r,_,_,_) -> r

let insert(x,h) = merge(h, NODE(0,x,EMPTY,EMPTY))

let findMin h = match h with
  | EMPTY -> raise EmptyHeap
  | NODE(_,x,_,_) -> x

let deleteMin h = match h with
  | EMPTY -> raise EmptyHeap
  | NODE(_,x,lh,rh) -> merge(lh,rh)
```

나머지 함수 `merge`

```
merge: heap * heap -> heap
```

를 정의하세요. 이 때, 원소힙의 장점을 살려서 여러분이 정의한 `merge`는 $O(\log n)$ 으로 끝나도록 해야 합니다 (n 은 힙의 노드 수). (참고사실: 원소힙에서 오른쪽 척추에 붙어있는 노드수는 많아야 $\lceil \log(n+1) \rceil$ 입니다.) 정의할 때 다음의 함수를 이용하시기를:

```
let shake (x, lh, rh) = if (rank lh) >= (rank rh)
                        then NODE(rank rh + 1, x, lh, rh)
                        else NODE(rank lh + 1, x, rh, lh)
```

□

Exercise 4 “Queue = 2 Stacks”

큐는 반드시 하나의 리스트일 필요는 없습니다. 두개의 스택으로 큐를 효율적으로 구현할 수 있습니다. 큐에 넣고 빼는 작업이 거의 한 스텝에 이루어질 수 있습니다. (하나의 리스트위를 더듬는 두 개의 포인터를 다루었던 C의 구현과 장단점을 비교해 보세요.)

각각의 큐 연산들의 타입들은:

```
emptyQ: queue
enQ: queue * element -> queue
deQ: queue -> element * queue
```

큐를 $[a_1; \dots; a_m; b_1; \dots; b_n]$ 라고 합시다 (b_n 이 머리). 이 큐를 두개의 리스트 L 과 R 로 표현할 수 있습니다:

$$L = [a_1; \dots; a_m], \quad R = [b_n; \dots; b_1].$$

한 원소 x 를 삼키면 새로운 큐는 다음이 됩니다:

$$[x; a_1; \dots; a_m], [b_n; \dots; b_1].$$

원소를 하나 빼고나면 새로운 큐는 다음이 됩니다:

$$[a_1; \dots; a_m], [b_{n-1}; \dots; b_1].$$

빨 때, 때때로 L 리스트를 뒤집어서 R 로 갈다 봐야하겠습니다. 빈 큐는 $([], [])$ 이겠지요.

다음과 같은 Queue 타입의 모듈을 작성합니다:

```
module type Queue =
  sig
    type element
    type queue
    exception EMPTY_Q
    val emptyQ: queue
    val enQ: queue * element -> queue
    val deQ: queue -> element * queue
  end
```

다양한 큐 모듈이 위의 Queue 타입을 만족시킬 수 있습니다. 예를들어:

```
module IntListQ =
  struct
    type element = int list
    type queue = ...
    exception EMPTY_Q
    let emptyQ = ...
    let enQ = ...
    let deQ = ...
  end
```

는 정수 리스트를 큐의 원소로 가지는 경우겠지요. 위의 모듈에서 함수 enQ와 deQ를 정의하기 바랍니다.

이 모듈에 있는 함수들을 이용해서 큐를 만드는 과정의 예는:

```
let myQ = IntListQ.emptyQ
let yourQ = IntListQ.enQ(myQ, [1])
```

```
let (x,restQ) = IntListQ.deQ yourQ
let hisQ = IntListQ.enQ(myQ, [2])
```

□