Research On Program Analysis System
National Creative Research Initiative Center 1998-2003
Programming Research Laboratory, School of Computer Science & Engineering
Seoul National University

ROPAS MEMO
2006-29
June 13, 2006

# 완비부분순서집합에서 정의된 단조함수의 최소고정점을 구하는 방법

박대준
pudrife@ropas.snu.ac.kr
서울대학교 컴퓨터공학부 / 프로그래밍 연구실

June 13, 2006

**Abstract**

이 글은 완비부분순서집합(CPO)에서 정의된 단조함수(monotone)의 최소고정점을 구하는 방법을 제시한다. 지금까지 최소고정점을 구하는 방법에 따른 조건들은 이보다 제약이 더 많았다. 그것은 완비부분순서집합에서 정의된 연속함수(continuous)이거나 완비격자(complete lattice)에서 정의된 단조함수(monotone)라는 조건이다. 이 글에서는 지금까지 제시된 방법 중 가장 적은 제약조건하에서의 최소고정점을 다룬다.

## 1 소 개

이 글은 완비부분순서집합(CPO)에서 정의된 단조함수(monotone)의 최소고정점을 구하는 방법을 제시한다. 지금까지 최소고정점을 구하는 방법에 따른 조건들은 이보다 제약이 더 많았다. 완비부분순서집합(CPO)일 경우에는 연속함수(continuous)라는 조건이 추가되어야 했고, 단조함수일때는 완비 격자(complete lattice) 라는 조건이 추가되어야 했다.[1] 이 글에서는 지금까지 제시된 방법 중 가장 적은 제약조건(완비부분순서집합과 단조함수)하에서의 최소고정점을 다룬다.

2장에서는 순서수(ordinals)에 대한 기초 지식을 설명한다. 향후 최소고정점의 성질에 대한 증명에서 초한수(transfinite number)에 대한 지식이 필요하기 때문에, 그에 대한 짧은 소개를 2장에 넣었다. 이미 익숙한 사람은 건너뛰어도 되는 내용이다. 3장에서는 본격적으로 최소고정점을 이야기하기 앞서 여러가지 정의들을 소개한다. 그리고 그 정의들에 기반하여, 4장에서 완비부분순서집합(CPO)에서 정의된 단조함수의 최소고정점을 구하는 방법을 제시하고, 그것이 올바른 것임을 증명한다. 5장과 6장은 3장과 4장을 통해 증명한 내용의 개념과 직관을 제공한다.

이 글에서 사용된 국문 수학용어는 대한수학회에서 제공하는 용어사전을 참고하였고, 난해한 국문 용어는 영문과 함께 표기하였다.

# 2 기본 개념

## 2.1 순서수(Ordinals)

임의의 집합 $S$가 부분집합관계($\subseteq$)에 대해 완전순서집합(totally ordered set)을 이루고, 모든 원소가 $S$의 부분집합일 때, $S$를 순서수(ordinal number, ordinals)라고 한다. $\mathcal{O}$를 순서수들의 집합(class)이라고 하면, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{O} \,.\, (\alpha \in \beta) \Leftrightarrow (\alpha < \beta)$이다. 예를 들어, 다음과 같이 순서수들을 나열할 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 &= \{\} = \phi \\ 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0, 1\} \\ &\vdots \\ \omega_0 = \omega &= \{0, 1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{N} \\ \omega + 1 &= \{0, 1, 2, 3, \cdots, \omega\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

위와 같이 순서수를 계속 나열해보면, $0, 1, 2, \cdots, \omega, \omega+1, \omega+2, \cdots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \cdots, \omega \cdot 3, \cdots, \omega \cdot 4, \cdots, \omega^2, \cdots, \omega^3, \cdots, \omega^\omega, \cdots, \omega^{\omega^2}, \cdots$ 등과 같이 무한히 나열할 수 있다.

## 2.2 초기 순서수(Initial Ordinal)

자신의 원소의 개수(cardinality)가 임의의 기수(cardinal) $N$인 순서수들 중, 가장 작은 순서수를 $N$의 초기 순서수라고 한다. 모든 유한 순서수(자연수)는 초기 순서수이지만, 대부분의 무한 순서수는 초기 순서수가 아니다. 이 때, $\alpha$번째 무한 초기 순서수를 $\omega_\alpha$라 표기하며, 그것의 기수(cardinality)는 $\aleph_\alpha$이다. 예를 들어, $|\omega| = |\omega_0| = \aleph_0 = |\omega^2|$, $|\omega_1|$[1] $= \aleph_1$이다. 그러나 $\omega^2 > \omega$인 반면, $\aleph_0^2 = \aleph_0$이다.

## 2.3 바로 뒤 순서수(Successor Ordinal)와 극한 순서수(Limit Ordinal)

자신의 원소 중 가장 큰 원소 $\alpha$를 가지고 있는 순서수를 $\alpha$의 바로 뒤 순서수(successor ordinal)라고 하며, $\alpha + 1$ 또는 $S(\alpha)$라고 표기한다. 0을 제외한 순서수 중, 바로 뒤 순서수가 아닌 것을 극한 순서수(limit ordinal)라고 한다. $\alpha$의 바로 뒤 순서수 $S(\alpha)$는 $\alpha \cup \{\alpha\}$과 동일하다.

## 2.4 순서수의 합(Ordinal Addition)

순서수에 대한 덧셈 연산은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha \\ \alpha + S(\beta) &= S(\alpha + \beta) \\ \alpha + \lambda^2 &= \bigcup_{\beta < \lambda} (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

[1] $\omega_1$은 가장 작은 비가산(uncountable) 순서수이다.
[2] $\lambda$는 극한 순서수(limit ordinal)이다.

### 2.5 초한 귀납법(Transfinite Induction)

초한 귀납법(transfinite induction)은 모든 순서수(ordinals)에 대해서 임의의 성질 $P$를 증명할 때 사용된다. 그 증명은 일반적으로 다음의 세 단계로 나뉜다.

- 기저 경우(Base case): $P(0)$을 증명한다.
- 바로 뒤 경우(Successor case): 임의의 순서수 $\beta$에 대하여, $P(\beta) \Rightarrow P(\beta+1)$을 증명한다. 혹은, $(\forall\alpha < \beta \,.\, P(\alpha) \ \wedge\ P(\beta)) \Rightarrow P(\beta+1)$을 증명한다.
- 극한 경우(Limit case): 임의의 극한 순서수 $\lambda$에 대하여, $(\forall\alpha < \lambda \,.\, P(\alpha)) \Rightarrow P(\lambda)$를 증명한다.

### 2.6 초한 반복(Transfinite Recursion)

초한 반복(transfinite recursion)은 초한 귀납법과 관계된 개념으로써, 어떤 것을 구성하거나 정의하는데 사용되는 기법이다. 예를 들어, 모든 순서수 $\alpha$에 대해 정의된 집합들의 순열 $A_\alpha$는 다음의 세 가지를 언급함으로써 정의될 수 있다.

- $A_0$를 정의한다.
- 임의의 순서수 $\alpha$에 대하여, $A_\alpha$로 부터 $A_{\alpha+1}$를 정의하는 방법을 결정한다. 혹은, $A_\alpha$에 이르는 모든 순열로부터 $A_{\alpha+1}$를 정의하는 방법을 결정한다.
- 임의의 극한 순서수 $\lambda$에 대하여, $\alpha < \lambda$를 만족하는 모든 $A_\alpha$로 부터 $A_\lambda$를 정의하는 방법을 결정한다.

## 3 정 의

**정의 1 (완비 부분 순서(Complete Partial Order))** 부분 순서 집합*(partially ordered set)*이 자신의 모든 사슬*(chain)*에 대한 최소상한*($\sqcup$)*를 가지고, 가장 작은 원소*($\perp$)*를 가질 경우, 완비 부분 순서*(Complete Partial Order, CPO)*라고 한다.

**정의 2 ($\mathcal{O}$-순열)** $\langle L, \sqsubseteq, \perp\rangle$이 완비 부분 순서*(CPO)*이고, $\mathcal{O}$는 순서수들의 집합*(class)*이며, $F \in L \stackrel{mon}{\to} L$일 때, $\mathcal{O}$-순열 $\{X^\delta\}_{\delta\in\mathcal{O}}$은 다음과 같은 초한 반복으로 정의된다.

- $X^0 = \perp$
- $X^\delta = \begin{cases} F(X^{\delta-1}), & \delta\text{가 바로 뒤 순서수 일 때} \\ \bigsqcup_{\alpha<\delta} X^\alpha, & \delta\text{가 극한 순서수 일 때} \end{cases}$

**정의 3 ($\mu$-항 순열)** $\langle L, \sqsubseteq, \perp\rangle$이 완비 부분 순서*(CPO)*이고, $\mu$가 $|\{\delta \mid \delta \in \mu\}| > |L|$을 만족하는 가장 작은 순서수이며, $F \in L \stackrel{mon}{\to} L$일 때, $\mu$-항 순열 $\{X^\delta\}_{\delta\in\mu}$은 $\mathcal{O}$-순열 중 $\mu$개의 앞절편*(prefix)*이다.

**정의 4 (정류(Stationary) 순열)** 순열 $\{X^\delta\}_{\delta\in\mu}$이 정류*(stationary)* 순열이라는 것은 다음과 동치이다*:* $\exists\epsilon \in \mu \,.\, \forall\beta \in \mu \,.\, (\beta \geq \epsilon) \Rightarrow (X^\epsilon = X^\beta)$. 이 때, $X^\epsilon$을 그 순열의 극한이라 한다.

# 4 성 질

**도움정리 1** $\langle L, \sqsubseteq, \perp\rangle$이 완비 부분 순서*(CPO)*이고, $F \in L \overset{mon}{\to} L$이며, $\{X^\delta\}_{\delta\in\mathcal{O}}$가 $\mathcal{O}$-순열일 때, 임의의 $\delta$에 대하여, $\bigsqcup_{\alpha<\delta} F(X^\alpha) \sqsubseteq F(\bigsqcup_{\alpha<\delta} X^\alpha)$이다.

**증명.** $\sqcup$의 정의에 의하여:

$$\forall\alpha' < \delta \,.\, X^{\alpha'} \sqsubseteq \bigsqcup_{\alpha<\delta} X^\alpha$$

$F$ 이 단조함수이므로:

$$\forall\alpha' < \delta \,.\, F(X^{\alpha'}) \sqsubseteq F(\bigsqcup_{\alpha<\delta} X^\alpha)$$

$\sqcup$의 정의에 의하여:

$$\bigsqcup_{\alpha<\delta} F(X^\alpha) \sqsubseteq F(\bigsqcup_{\alpha<\delta} X^\alpha)$$

□

**도움정리 2** $\langle L, \sqsubseteq, \perp\rangle$이 완비 부분 순서*(CPO)*이고, $F \in L \overset{mon}{\to} L$이며, $\{X^\delta\}_{\delta\in\mathcal{O}}$가 $\mathcal{O}$-순열일 때, $\forall\delta \in \mathcal{O} \,.\, X^\delta \sqsubseteq X^{\delta+1}$이다.

**증명.** $\perp$의 정의에 의하여, $X^0 = \perp \sqsubseteq X^1$이다. 다음을 가정하자(귀납 가정):

$$\forall\alpha < \delta \,.\, X^\alpha \sqsubseteq X^{\alpha+1}$$

즉, $\{X^{\alpha+1}\}_{\alpha<\delta}$는 증가하는 사슬이다. 만약, $\delta$가 바로 뒤 순서수라면, 귀납 가정에 의해, $X^{\delta-1} \sqsubseteq X^\delta$이다. $F$가 단조함수이므로, $F(X^{\delta-1}) \sqsubseteq F(X^\delta)$이고, $\mathcal{O}$-순열의 정의에 의하여, $X^\delta \sqsubseteq X^{\delta+1}$이다. 만약 $\delta$가 극한 순서수라면:

$$\begin{array}{rcll}
X^\delta & = & \bigsqcup_{\alpha<\delta} X^\alpha & \mathcal{O}\text{-순열의 정의에 의하여} \\
& \sqsubseteq & \bigsqcup_{\alpha<\delta} X^{\alpha+1} & \text{귀납 가정에 의하여} \\
& = & \bigsqcup_{\alpha<\delta} F(X^\alpha) & \mathcal{O}\text{-순열의 정의에 의하여} \\
& \sqsubseteq & F(\bigsqcup_{\alpha<\delta} X^\alpha) & \text{도움정리 1에 의하여} \\
& = & F(X^\delta) & \mathcal{O}\text{-순열의 정의에 의하여} \\
& = & X^{\delta+1} & \mathcal{O}\text{-순열의 정의에 의하여}
\end{array}$$

초한 귀납법에 의하여, $\forall\delta \in \mathcal{O} \,.\, X^\delta \sqsubseteq X^{\delta+1}$이다. □

**도움정리 3** $\langle L, \sqsubseteq, \perp\rangle$이 완비 부분 순서*(CPO)*이고, $F \in L \overset{mon}{\to} L$이며, $\{X^\delta\}_{\delta\in\mathcal{O}}$가 $\mathcal{O}$-순열일 때, 만약 $X^\epsilon = X^{\epsilon+1}$ 를 만족하는 $\epsilon \in \mathcal{O}$이 존재하면, $\forall\delta \in \mathcal{O} \,.\, (\epsilon \le \delta) \Rightarrow (X^\epsilon = X^\delta)$이다.

**증명.** $\delta = \epsilon$일 때, $X^\epsilon = X^\delta$이다. 다음을 가정하자(귀납 가정):

$$\forall\alpha \,.\, (\epsilon \le \alpha < \delta) \Rightarrow (X^\epsilon = X^\alpha)$$

만약 $\delta$가 바로 뒤 순서수라면, 귀납 가정에 의해, $X^\epsilon = X^{\delta-1}$이다. $F$가 단조함수이므로, $F(X^\epsilon) = F(X^{\delta-1})$이고, $\mathcal{O}$-순열의 정의에 의하여, $X^{\epsilon+1} = X^\delta$이다. $\epsilon$의 전제에 의하여, $X^\epsilon =$

$X^\delta$이다. 만약 $\delta$가 극한 순서수라면:

$$\begin{array}{rcll} X^\delta & = & \bigsqcup_{0\le\alpha<\delta} X^\alpha & \mathcal{O}\text{-순열의 정의에 의하여} \\ & = & \bigsqcup_{0\le\alpha\le\epsilon} X^\alpha \sqcup \bigsqcup_{\epsilon+1\le\alpha<\delta} X^\alpha & \bigsqcup\text{의 정의에 의하여} \\ & = & X^\epsilon \sqcup \bigsqcup_{\epsilon+1\le\alpha<\delta} X^\alpha & \bigsqcup\text{의 정의와 도움정리 2에 의하여} \\ & = & X^\epsilon \sqcup X^\epsilon & \bigsqcup\text{의 정의와 귀납 가정에 의하여} \\ & = & X^\epsilon & \sqcup\text{의 정의에 의하여} \end{array}$$

초한 귀납법에 의하여, $\forall\delta\in\mathcal{O}\,.\,(\epsilon\le\delta)\Rightarrow(X^\epsilon=X^\delta)$이다. □

**도움정리 4** $\langle L,\sqsubseteq,\bot\rangle$이 완비 부분 순서*(CPO)*이고*,* $F\in L\overset{mon}{\to}L$이며*,* $\{X^\delta\}_{\delta\in\mathcal{O}}$가 $\mathcal{O}$*-*순열일 때*,* $\forall P\in L\,.\,(F(P)\sqsubseteq P)\Rightarrow(\forall\delta\in\mathcal{O}\,.\,X^\delta\sqsubseteq P)$이다*.*

**증명.** $F(P)\sqsubseteq P$를 만족하는 임의의 $P\in L$를 생각하자. $\mathcal{O}$-순열의 정의에 의하여, $\bot = X^0\sqsubseteq P$이다. 다음을 가정하자(귀납 가정):

$$\forall\alpha\in\mathcal{O}\,.\,(\alpha<\delta)\Rightarrow(X^\alpha\sqsubseteq P)$$

만약 $\delta$가 바로 뒤 순서수라면, 귀납 가정에 의해 $X^{\delta-1}\sqsubseteq P$이고, $F$는 단조함수이므로:

$$X^\delta=F(X^{\delta-1})\sqsubseteq F(P)\sqsubseteq P$$

만약 $\delta$가 극한 순서수라면, 귀납 가정과 $\bigsqcup$의 정의에 의해:

$$X^\delta=\bigsqcup_{\alpha<\delta}X^\alpha\sqsubseteq P$$

초한 귀납법에 의하여, $\forall\delta\in\mathcal{O}\,.\,X^\delta\sqsubseteq P$이다. □

**정리 1 (단조함수의 최소 고정점)** $\langle L,\sqsubseteq,\bot\rangle$이 완비 부분 순서*(CPO)*이고*,* $\mu$가 $|\{\delta\mid\delta\in\mu\}|>|L|$을 만족하는 가장 작은 순서수이며*,* $F\in L\overset{mon}{\to}L$일 때*,* $\mu$*-*항 순열 $\{X^\delta\}_{\delta\in\mu}$은 정류 증가 순열이고*,* 그것의 극한 $X^\epsilon$은 $F$의 최소 고정점이다*.*

**증명.** 도움정리 2에 의하여, $\{X^\delta\}_{\delta\in\mu}$은 증가하는 사슬이다. $\{X^\delta\}_{\delta\in\mu}$이 순 증가(strictly increasing)하는 사슬이라고 가정하자. 즉:

$$\forall\gamma\in\mathcal{O}\,.\,(\gamma\in\mu\ \wedge\ (\gamma+1)\in\mu)\Rightarrow(X^\gamma\neq X^{\gamma+1})$$

이 때, $\forall\delta\in\mu\,.\,X^\delta\in L$이기 때문에, $\{X^\delta\}_{\delta\in\mu}$에서 $L$로 가는 단사 사상(injective mapping)이 존재한다. 즉, $|\{X^\delta\}_{\delta\in\mu}|\le|L|$이다. 그러나 $\mu$의 정의에 의하여, $|\{X^\delta\}_{\delta\in\mu}|>|L|$이기 때문에, 가정에 모순이다. 따라서:

$$\exists\epsilon\,.\,(\epsilon\in\mu)\ \wedge\ ((\epsilon+1)\in\mu)\ \wedge\ (X^\epsilon=X^{\epsilon+1})$$

정류 순열의 정의와 도움정리 3에 의하여, $\{X^\delta\}_{\delta\in\mu}$은 정류 순열이고, 그 극한은 $X^\epsilon$이다. 이 때,

$$X^\epsilon=X^{\epsilon+1}=F(X^\epsilon)$$

이므로, $X^\epsilon$은 $F$의 고정점이다. 더 나아가, 도움정리 4에 의하여, $F(P)=P$을 만족하는 모든 $P\in L$에 대해,

$$X^\epsilon\sqsubseteq P$$

이므로, $X^\epsilon$ 는 $F$의 최소 고정점이다. □

# 5 직관적 해석

$F$를 반복 적용시켜 가는 방법으로 최소 고정점을 구하는 데 있어서, $F$가 단조함수라는 조건은 꽤 중요하다. $F$에 의해 증가하는 영역에 있는 원소 $l$, 즉 $l \sqsubseteq F(l)$, 에서 시작하여 $F$를 계속 적용시켜 만든 수열은, $F$가 단조함수일때, 사슬(chain)이 되기 때문이다.

반복 적용 방법으로 최소고정점을 구하는 방법에는 다음과 같은 직관이 담겨있다. $F$를 적용시켜 한단계 앞으로 나아가는 스텝은 순서수(ordinal number) 개념으로서 하나씩 값이 증가하게 된다. $F$를 처음부터 적용시킨 횟수는 기수(cardinal number, 집합의 크기) 개념으로 따지게 된다. 이 때, 도메인에 존재하는 체인들의 최대 길이보다 더 큰 횟수로 $F$를 적용시키면, $F$에 의해 만들어진 체인은 반드시 수렴하고, 그 극한값이 최소고정점이 된다. (정리 1[단조함수의 최소 고정점])

두가지 종류의 도메인에 대하여 이와 같은 사실을 음미해보자. 도메인이 증가하는체인조건(ascending chain condition)을 가졌거나, 유한한 원소로 구성이 되어 있다면, 그 도메인의 체인들의 최대 길이는 유한하다. 즉, 자연수이다. 모든 자연수 $n$에 대하여 그 $n$보다 기수(cardinal number, 집합의 크기)개념으로써 한단계 큰 수는 $n+1$이고, 당연히 자연수이다. 따라서 $F$를 $n+1$번만, 즉 자연수만큼만, 적용시켜가면 최소고정점으로 수렴한다. 이것은 직관적으로 쉽게 이해가 가는 부분이다. 그렇다면 도메인의 원소의 개수가 무한하면서 증가하는 체인조건을 가지지 않았을 경우는 어떤가? 이 때, 도메인의 체인의 최대 길이는 도메인의 원소의 개수(cardinality)이다. $\aleph_\alpha$라고 하자. 따라서 $F$를 $\aleph_\alpha$보다 기수(cardinal number, 집합의 크기)개념으로써 한단계 큰 수 만큼 적용시켜야 한다. 그 수가 바로 $\mu$-항 순열의 $\mu$이다. 정의를 보라. 예를 들어, 도메인의 원소의 개수가 자연수집합의 원소 개수($\aleph_0$)만큼 존재한다면,[3] $F$를 실수집합의 원소 개수($\aleph_1$)만큼 적용시켜 가면 최소고정점에 수렴하는 것이다. 서수(ordinal number)개념으로 말하자면, $\omega_1$번째 스텝에서 수렴한다고 볼 수 있다. 사실 $\omega_0 + 1$번째 스텝에서 수렴하는 게 아닐까라고 생각할 수 있지만, 그 스텝까지 적용시킨 것은 기수(cardinal number, 집합의 크기)개념으로써 $\omega_0$번 적용시킨 것과 횟수의 차이가 없다. 따라서 이 증명은 유한한 도메인에 대하여 우리가 쉽게 가졌던 직관을 무한한 도메인에 그대로 확장시킨 것에 불과하다.

# 6 정리: 묻고 답하기

**왜 이것을 하게 되었는가?**

단조함수에서도 최소고정점이 존재함을 알게되었고, 완비 격자(complete lattice)에서 증명한 논문을 보게되었다. 그 논문의 증명을 보니, 완비부분순서집합(CPO)이라는 조건만 있어도 될 것 같아, 직접 증명을 하게 되었다.

아울러, 최소 고정점(least fixpoint), 순서수(ordinal number), 초한 귀납법(transfinite induction)의 개념이 익숙치 않은 이들에게 도움이 되기 위함이다.

[3]가장 일반적인 경우일 것이다.

**다른 것과 뭐가 다른가?**

이것은 완비부분순서집합(CPO)에서 단조함수 성질만 만족하면 최소고정점이 존재하며, 반복해서 함수를 적용해가는 과정을 거쳐 그것을 구할 수 있음을 증명한것이다.

**무슨 유용함이 있는가?**

이것은 최소고정점이 존재하거나 구할 수 있음을 가정하고 있는 이론을 세울 때를 염두에 두고 이루어진 작업이다. 가능하면 작은 조건을 두는 것이 증명하거나 나중에 이용되기 편하기 때문이다.

구현에 초점을 두지 않았다. 사실 도메인이 유한한 경우, 단조함수라면 연속함수이기때문에 별 문제없다. 그러나 도메인이 무한하게되면, 비록 연속함수성질이 있어서 자연수 범위내에서만 반복을 한다할지라도, 실제로 구현하기엔 너무 비싸기 때문에, 자연수 범위가 아닌 초한한 단계까지 반복을 해야하는 부담과 별로 차이가 없다.

**이 증명이 다른 증명의 일반화인가?**

첫째로, 완비 격자(complete lattice) 조건은 전혀 필요없다. 둘째로, 연속함수라면, 초한한 단계까지 하지 않고 자연수 스텝 안에서 끝남을 보일 수 있다.

증명. 다음이 사실이다.

$$F^\omega = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} F^i = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} F^{i+1} \sqsubseteq F(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} F^i) = F(F^\omega) = F^{\omega+1}$$

가운데 $\sqsubseteq$가 $=$이 된다면, $F^\omega$가 고정점이고, Lemma (Upper bound of iteration)에 의해 최소고정점이다. 이 가정이 바로 연속함수의 조건이고, 그 때 $F^\omega$가 거기서 말하는 최소고정점이다. 따라서 이 증명은 연속함수의 경우를 포섭한다. □

**순서수(ordinals)에서는 숫자를 집합으로 보는데, 그래도 되는건가?**

사실 우리가 사용한 숫자에 어떤 의미를 둔 적이 없다. 단순히 숫자를 더하고 곱했을 때, 다른 숫자로 대응이 됨을 알고 있을 뿐이다. 숫자에 집합의미를 두던 다른 의미를 두던지 상관없다. 의미를 두되, 그 의미를 가지고 기본적인 연산을 정의해서, 기존의 연산들이 하던일을 동일하게 하기만 하면 된다.

**직관적으로 결론을 이해하는데 꼭 필요한 개념은?**

한 단계 앞으로 나아가는 스텝은 서수(ordinal number) 개념이고, 스텝의 횟수는 기수(cardinal number, 집합의 크기) 개념이다. 유한한 단계에서는 두 개념이 동일하다. 즉, 한 단계 앞으로 나아가면, 스텝의 횟수도 1씩 증가한다. 하지만, 무한한 단계에서는 그렇지 않다. 무한한 단계에서는 한 단계 앞으로 나아가서 한 번 더 스텝을 밟는다하여도, 전체 스텝의 횟수(집합의 크기)는 늘어나지 않는다. 이 개념을 이해하면, 직관적으로 결론을 이해하기 쉬울 것이다.

# References

[1] P. Cousot and R. Cousot, Constructive Versions Of Tarski's Fixed Point Theorems, Pacific Journal of Mathematics, Vol.82, No.1, pp.43-57, 1979