Homework 2
SNU 4910.210 Fall 2010

Kwangkeun Yi

due: ~~9/25~~ 9/30 24:00

이번 숙제의 목적은:

- 재귀적인 프로그램을 익숙하게 한다.
- 재귀적인 데이터 생성 함수들을 이용해 프로그램하는 것을 익힌다.
- 타입을 따지면서 프로그램하는 것을 익힌다.
- 속 구현을 보지말고 인터페이스만 알고 프로그램하는 것을 익힌다.

Exercise 1 "나무구조 데이타"

컴퓨터과학(computer science)은 나무를 늘 다룬다. 깊고 검은 숲이나, 아름드리 나무나, 왕성하게 뻗은 가지들을 항상 다루게 된다.

나무구조(혹은 가지구조, tree)는 다음과 같이 정의된다:

- 기본 나무구조: 잎새 하나는 나무구조이다.
- 나무구조들을 품고있는 나무구조: 하나의 꼭지에서 한 개 이상의 나무구조들이 하나하나 가지로 뻗어나간 구조는 다시 나무구조이다.

위의 두 가지 조건이 나무구조를 만드는 두가지 방법을 결정한다: 기본적인 나무를 만드는 방법(base case)과 만든 나무들을 가지고 새로운 나무를 만드는 방법(inductive case).

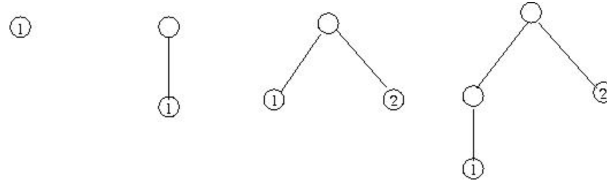
나무구조를 만드는 다음의 두 함수를 정의하라:

$$\texttt{leaf} : \alpha \to \mathit{tree}$$
$$\texttt{node} : \mathit{tree}\ \mathit{list} \to \mathit{tree}$$

`leaf`는 임의의 타입("α"로 표현하기로 하자)의 값을 가지는 잎새 나무를 만든다. 즉, `(leaf 1)`하면 정수 1을 가지는 잎새 나무가, `(leaf 'a)`하면 심볼

a를 가지는 잎새나무가, `(leaf '(1 2))`하면 리스트 (1 2)를 가지는 잎새나무가 되겠다. `node`는 나무들의 리스트를 받아서 그들을 차례로 매달고 있는 새로운 나무를 만든다. `node`가 빈 리스트를 받으면 빈 나무를 만든다.

예를 들어, 아래 그림의 나무구조들은



각각 `(leaf 1)`, `(node (list (leaf 1)))`, `(node (list (leaf 1) (leaf 2)))`, 그리고 `(node (list (node (list (leaf 1))) (leaf 2)))` 로 만든 구조물들이 되겠다.

나무를 사용하는 다음 세가지 함수들도 정의하라:

$$\texttt{is-empty-tree?} : \mathit{tree} \rightarrow \mathit{bool}$$
$$\texttt{is-leaf?} : \mathit{tree} \rightarrow \mathit{bool}$$
$$\texttt{leaf-val} : \mathit{tree} \rightarrow \alpha$$
$$\texttt{nth-child} : \mathit{tree} \times \mathit{nat} \rightarrow \mathit{tree}$$

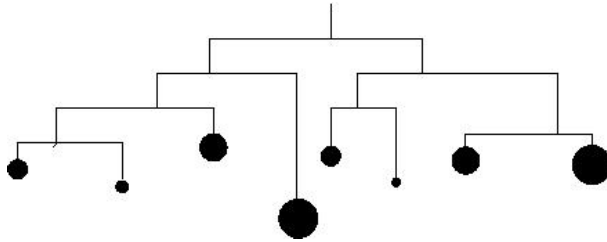
`is-empty-tree?`는 주어진 나무가 빈 나무인지를 판별한다. `is-leaf?`는 주어진 나무가 잎새 나무인지 아닌지를 판별한다. `leaf-val`은 잎새가 가지고 있는 데이타를 꺼낸다. `nth-child`는 나무와 자연수 $n \geq 0$을 받아서 그 나무의 n번째 가지의 나무(n-th subtree)를 내 놓는다. □

Exercise 2 "모빌 무게 재기"

천장에 매달려 균형을 잡은 채 은은히 흔들리고 있는 모빌을 떠올려보자. 일반적인 두갈래 모빌은 다음과 같이 정의된다:

- 모형 하나는 모빌구조이다.
- 모빌들을 품고있는 모빌: 하나의 균형점에서 왼쪽/오른쪽의 모빌구조들이 뻗어나간 구조는 다시 모빌구조이다.

예를 들어 두 갈래 모빌의 한 예는 아래와 같다:



모빌구조를 만드는 다음 세 가지 함수를 정의하라. 단, 반드시 Exercise 1에서 정의한 함수를 사용한다:

`model` : $nat \to mobile$
`make-branch` : $nat \times mobile \to branch$
`make-mobile` : $branch \times branch \to mobile$

`model`은 입력한 자연수값만큼의 무게를 갖는 모형 모빌을 만든다. `make-branch`는 그 길이와 끝에 매달린 모빌을 받아 하나의 가지를 이룬다. `make-mobile`은 왼쪽/오른쪽의 가지를 받아 하나의 모빌을 이룬다.

모빌을 사용하는 다음 두 가지 함수들도 정의하라:

`is-balanced?` : $mobile \to bool$
`weight` : $mobile \to nat$

`is-balanced?`는 주어진 모빌이 "균형잡혀있는지"를 판별한다. 하나의 모빌은 양쪽 가지의 토크(길이×무게)가 같을 때 균형이 잡히며, 두 가지의 무게의 합이 그 모빌의 무게가 된다. 한 모빌 구조 내의 모든 하위 모빌 구조가 균형 상태에 있을 때, 그 모빌은 "균형잡혀있다"고 한다. `weight`는 그 모빌구조의 총 무게를 내놓는다. □

Exercise 3 "논리회로"

부울 회로(Boolean circuit)라는 것은 다음과 같이 귀납적으로 정의된다. 모든 부울 회로는 하나 이상의 입력과 하나의 출력을 가지고 있다.

- 기본: 0을 가진 전기줄은 부울 회로이다.
- 기본: 1을 가진 전기줄은 부울 회로이다.
- 귀납: 부울 회로 하나를 가지고 또다른 회로를 만드는 방법 `not`이 있다.
- 귀납: 부울 회로 두개를 가지고 또다른 회로를 만드는 방법 `and`가 있다.
- 귀납: 부울 회로 두개를 가지고 또다른 회로를 만드는 방법 `or`가 있다.

부울 회로를 만드는 위의 다섯가지 방법들을 정의하라:

`zero` : *circuit*
`one` : *circuit*
`not-circuit` : $circuit \rightarrow circuit$
`and-circuit` : $circuit \times circuit \rightarrow circuit$
`or-circuit` : $circuit \times circuit \rightarrow circuit$

위의 것들을 정의할 때는 반드시 Exercise 1에서 정의한 함수만을 사용한다.

그리고 부울 회로를 사용하는 아래의 여섯가지 함수들도 정의하라:

`is-zero?` : $circuit \rightarrow bool$
`is-one?` : $circuit \rightarrow bool$
`is-not?` : $circuit \rightarrow bool$
`is-and?` : $circuit \rightarrow bool$
`is-or?` : $circuit \rightarrow bool$
`sub-circuit` : $circuit \times nat \rightarrow circuit$

`sub-circuit`은 회로와 자연수 $n \geq 0$을 받아서 그 회로의 n번째 가지의 회로(n-th sub-circuit)를 내 놓는다. □

Exercise 4 "논리 회로의 계산"

Exercise3의 함수들로 만들어진 부울 회로의 최종 출력값(회로의 의미)를 계산하는 함수

$$\texttt{output} : circuit \rightarrow \{0, 1\}$$

를 정의하라.

부울 회로의 최종 출력값은 그 회로가 어떻게 만들어 졌냐에 따라 다음과 같이 재귀적으로 정의된다. `zero`의 출력값은 0. `one`의 출력값은 1. (`not` B)은 회로 B의 출력값이 0이면 1, 1이면 0. (`and` B_1 B_2)은 회로 B_1과 B_2 둘의 출력값이 모두 1일 때만 1, 아니면 0. (`or` B_1 B_2)은 회로 B_1과 B_2 둘의 출력값이 모두 0일 때만 0, 아니면 1. □

Exercise 5 "미로 검증"

잡지에 가끔 미로 퀴즈가 부록으로 있었다. 종이에 그려진 미로를 상상해 보자. 그 미로를 다음과 같이 바라보자:

- 종이에 정4각형들이 빼곡히 채워져 있다(모눈종이). 각 정4각형은 하나의 방이다.

- 각 방들은 이웃한 방들과 사이의 벽들이 몇 개 터져 있기도 하고 막혀있기도 하다.
- 시작 방과 끝 방이 정해져 있다.

미로퀴즈를 잡지에 출판하기에 앞서, 편집진은 과연 미로퀴즈의 답이 있는 지 확인하는 과정을 밟을것이다. 시작 방에서 끝 방으로 이어지는 길이 있는지.

그러한 검증을 하는 `maze-check` 함수를 정의해 보자. (이러한 검증함수는 실제로 미로를 찾아내 주는 함수보다 간단하다):

$$\texttt{maze-check} : \mathit{maze} \times \mathit{room} \times \mathit{room} \rightarrow \mathit{bool}$$

`maze-check`은 미로와 시작 방과 끝 방을 주면 그 두 방을 연결하는 길이 있는지를 확인해 준다. 이때 미로는 유한하고 시작 방과 끝 방은 항상 그 미로안에 있는 방이라고 가정한다.

위의 함수를 구현 할 때는 미로가 어떻게 구현되었는지, 집합은 어떻게 구현되었는 지 알지 못하는 상태에서 다음의 함수들을 써서 구현할 수 있다:

$$\texttt{can-enter} : \mathit{room} \times \mathit{maze} \rightarrow \mathit{room}\ \ \mathit{list}$$
$$\texttt{same-room?} : \mathit{room} \times \mathit{room} \rightarrow \mathit{bool}$$

$$\texttt{empty-set} : \mathit{room}\ \ \mathit{set}$$
$$\texttt{add-element} : \mathit{room} \times \mathit{room}\ \ \mathit{set} \rightarrow \mathit{room}\ \ \mathit{set}$$
$$\texttt{is-member?} : \mathit{room} \times \mathit{room}\ \ \mathit{set} \rightarrow \mathit{bool}$$
$$\texttt{is-subset?} : \mathit{room}\ \ \mathit{set} \times \mathit{room}\ \ \mathit{set} \rightarrow \mathit{bool}$$

`can-enter`는 미로의 주어진 방에서 갈 수 있는 이웃한 방들의 리스트를 준다. `same-room?`은 두 방이 같은 방인지를 판별해 준다. 위의 여섯 함수들은 이번 숙제에서는 구현하지 않는다. □.