

Take-Home Exam 1  
SNU 4541.664A Program Analysis  
Spring 2006

Prof. Kwangkeun Yi

**due: 5/9 13:00** in class

**Problem 1** “요약해석 증명”

아래와 같은 변수가 있는 정수식 언어를 생각하자.

$$\begin{array}{l} E \rightarrow n \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ | \quad x \quad \text{변수} \\ | \quad E + E \\ | \quad - E \\ | \quad \text{let } x \ E_1 \ E_2 \quad \text{지역 변수} \\ | \quad \text{if } E_1 \ E_2 \ E_3 \end{array}$$

의미함수  $\mathcal{V}$ 는 아래와 같은 공간에서

$$\begin{array}{l} \mathcal{V} \in \text{Exp} \rightarrow 2^{\text{Env}} \rightarrow 2^{\mathbb{Z}} \\ \Sigma \in 2^{\text{Env}} \\ \sigma \in \text{Env} = \text{Var} \xrightarrow{\text{fin}} \mathbb{Z} \end{array}$$

조립식으로 정의된다:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} n \Sigma &= \{n\} \\
\mathcal{V} x \Sigma &= \{\sigma x \mid \sigma \in \Sigma\} \\
\mathcal{V} E_1 + E_2 \Sigma &= \{z_1 + z_2 \mid z_i \in \mathcal{V} E_i \Sigma\} \\
\mathcal{V} - E \Sigma &= \{-z \mid z \in \mathcal{V} E \Sigma\} \\
\mathcal{V} \text{let } x E_1 E_2 \Sigma &= \mathcal{V} E_2 \{\sigma\{x \mapsto v\} \mid \sigma \in \Sigma, v \in \mathcal{V} E_1 \Sigma\} \\
\mathcal{V} \text{if } E_1 E_2 E_3 \Sigma &= \mathcal{V} E_2 (\mathcal{B} E_1 \Sigma) \cup \mathcal{V} E_3 (\neg \mathcal{B} E_1 \Sigma) \\
\mathcal{B} E \Sigma &= \cup\{\Sigma' \mid \mathcal{V} E \Sigma' \neq 0, \Sigma' \subseteq \Sigma\} \\
\neg \mathcal{B} E \Sigma &= \cup\{\Sigma' \mid \mathcal{V} E \Sigma' = \{0\}, \Sigma' \subseteq \Sigma\}
\end{aligned}$$

의미공간  $2^S$ 는 집합  $S$ 의 부분집합들의 집합이고  $\subseteq$ 이  $\sqsubseteq$ 인 CPO이다.

요약된 의미함수  $\hat{\mathcal{V}}$ 는 다음의 공간에서

$$\hat{\mathcal{V}} \in \text{Exp} \rightarrow \hat{E}nv \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$$

정의되고, 의미공간 사이의 갈로아 연결

$$2^{Env} \rightarrow 2^{\mathbb{Z}} \xrightleftharpoons[\alpha]{\gamma} \hat{E}nv \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$$

은 각 부품의 갈로아 연결

$$2^{Env} \xrightleftharpoons[\alpha_1]{\gamma_1} \hat{E}nv \quad \text{와} \quad 2^{\mathbb{Z}} \xrightleftharpoons[\alpha_2]{\gamma_2} \hat{\mathbb{Z}}$$

를 가지고 안전하게 정의될 수 있다. 요약 의미함수의 조립식 정의는 다음과 같다:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{V}} n \hat{\Sigma} &= \alpha_2 \{n\} \\
\hat{\mathcal{V}} E_1 + E_2 \hat{\Sigma} &= \alpha_2 \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in \gamma_2(\hat{\mathcal{V}} E_1 \hat{\Sigma}), v_2 \in \gamma_2(\hat{\mathcal{V}} E_2 \hat{\Sigma})\} \\
\hat{\mathcal{V}} - E \hat{\Sigma} &= \alpha_2 \{-v \mid v \in \gamma_2(\hat{\mathcal{V}} E \hat{\Sigma})\} \\
\hat{\mathcal{V}} \text{let } x E_1 E_2 \hat{\Sigma} &= \hat{\mathcal{V}} E_2 (\alpha_1 \{\sigma\{x \mapsto v\} \mid \sigma \in \gamma_1(\hat{\Sigma}), v \in \gamma_2(\hat{\mathcal{V}} E_1 \hat{\Sigma})\}) \\
\hat{\mathcal{V}} \text{if } E_1 E_2 E_3 \hat{\Sigma} &= \hat{\mathcal{V}} E_2 (\alpha_2(\mathcal{B} E_1 (\gamma_1 \hat{\Sigma}))) \sqcup \hat{\mathcal{V}} E_3 (\alpha_2(\neg \mathcal{B} E_1 (\gamma_1 \hat{\Sigma})))
\end{aligned}$$

위의 요약함수가 올바른지를 확인하라. 즉, 모든 정수식  $E$ 에 대해서

$$\alpha(\mathcal{V} E) \sqsubseteq \hat{\mathcal{V}} E$$

인지를 증명하라.  $\square$

**Problem 2** 위의 요약 의미함수를 다음과 같이 정의했을 때도 올바른지를 증명하라.

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{V}} n \hat{\Sigma} &= \alpha_2 \{n\} \\
 \hat{\mathcal{V}} E_1 + E_2 \hat{\Sigma} &= (\hat{\mathcal{V}} E_1 \hat{\Sigma}) \hat{\dagger} (\hat{\mathcal{V}} E_2 \hat{\Sigma}) \\
 \hat{\mathcal{V}} - E \hat{\Sigma} &= \hat{\smile} (\hat{\mathcal{V}} E \hat{\Sigma}) \\
 \hat{\mathcal{V}} \text{let } x E_1 E_2 \hat{\Sigma} &= \hat{\mathcal{V}} E_2 (\hat{\Sigma} \{x \mapsto \hat{\mathcal{V}} E_1 \hat{\Sigma}\}) \\
 \hat{\mathcal{V}} \text{if } E_1 E_2 E_3 \hat{\Sigma} &= (\hat{\mathcal{V}} E_2 \hat{\Sigma}) \sqcup (\hat{\mathcal{V}} E_3 \hat{\Sigma})
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \hat{\dagger} &\in \hat{\mathbb{Z}} \times \hat{\mathbb{Z}} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}} \\
 \hat{\smile} &\in \hat{\mathbb{Z}} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}} \\
 \cdot \{x \mapsto \cdot\} &\in \hat{Env} \times \hat{\mathbb{Z}} \rightarrow \hat{Env} \quad (\text{환경 변경})
 \end{aligned}$$

은 실제  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot \{x \mapsto \cdot\}$ 을 안전하게 요약한 함수들이다.