

Theorem Problem

SNU 4541.664A Program Analysis

Spring 2006

Note 10

Prof. Kwangkeun Yi

요약해석 디자인과 구현의 예

변수가 있는 정수식 프로그램의 요약해석
명령형 언어 프로그램의 요약해석

변수가 있는 정수식 프로그램의 요약해석

$$\begin{array}{l}
 E \rightarrow n \quad (n \in \mathbb{Z}) \\
 | \\
 | \quad E + E \\
 | \\
 | \quad - E \\
 | \\
 | \quad x \quad \text{변수} \\
 | \\
 | \quad \text{let } x = E_1 \text{ in } E_2 \quad \text{지역 변수}
 \end{array}$$

의미공간

$$\sigma \in Env = Var \xrightarrow{\text{fin}} 2^{\mathbb{Z}}$$

의미함수

$$\mathcal{V} : Exp \rightarrow Env \rightarrow 2^{\mathbb{Z}}$$

$$\mathcal{V} n \sigma = \{n\}$$

$$\mathcal{V} x \sigma = \sigma x$$

$$\mathcal{V} E_1 + E_2 \sigma = \{z_1 + z_2 \mid z_i \in \mathcal{V} E_i \sigma\}$$

$$\mathcal{V} - E \sigma = \{-z \mid z \in \mathcal{V} E \sigma\}$$

$$\mathcal{V} \text{let } x = E_1 \text{ in } E_2 \sigma = \mathcal{V} E_2 \sigma \{x \mapsto \mathcal{V} E_1 \sigma\}$$

모든 식 E 의 의미는 조립식으로 $\mathcal{V} E$, 즉 상수함수 $\lambda x. \mathcal{V} E$ 의 최소고정점.

요약된 의미함수

$$\hat{V} : Exp \rightarrow Env \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$$

의 의미공간 사이의 갈로아 연결

$$Env \rightarrow 2^{\mathbb{Z}} \xrightleftharpoons[\alpha]{\gamma} \hat{Env} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$$

은 조립식으로, $Env \xrightleftharpoons[\alpha_1]{\gamma_1} \hat{Env}$ 와 $2^{\mathbb{Z}} \xrightleftharpoons[\alpha_2]{\gamma_2} \hat{\mathbb{Z}}$ 을 가지고:

$$\alpha f = \alpha_2 \circ f \circ \gamma_1$$

$$\gamma \hat{f} = \gamma_2 \circ \hat{f} \circ \alpha_1$$

$$\hat{\mathcal{V}} n \hat{\sigma} = \alpha_2 \{n\}$$

$$\hat{\mathcal{V}} E_1 + E_2 \hat{\sigma} = (\hat{\mathcal{V}} E_1 \hat{\sigma}) \hat{+} (\hat{\mathcal{V}} E_2 \hat{\sigma})$$

$$\hat{\mathcal{V}} - E \hat{\sigma} = \hat{-} (\hat{\mathcal{V}} E \hat{\sigma})$$

$$\hat{\mathcal{V}} \text{let } x = E_1 \text{ in } E_2 \hat{\sigma} = \hat{\mathcal{V}} E_2 \hat{\sigma} \{x \mapsto \hat{\mathcal{V}} E_1 \hat{\sigma}\}$$

정수식 E 의 요약 의미는 조립식: $\hat{\mathcal{V}} E$. 확인할 것: 모든 정수식 E 에 대해서

$$\alpha(\mathcal{V} E) \sqsubseteq \hat{\mathcal{V}} E$$

구현

프로그램 E 에 대해서, $\hat{V} E \in \hat{Env} \rightarrow \hat{Z}$ 의 계산:

- \hat{Env} 의 원소가 유한하다면?
모든 $\hat{\sigma} \in \hat{Env}$ 에 대해서 $\hat{V} E \hat{\sigma}$ 를 각각 계산.
 $\hat{V} E \hat{\sigma}$ 의 계산은 항상 끝남 (E 에 대한 조립).
- \hat{Env} 의 원소가 무한히 많다면? 혹은, 유한하지만 모든 경우가 필요 없다면?
 - 하나의 요약 환경 $\hat{\sigma}_0$ 으로 초기 환경을 모두 포섭시키고, $\hat{V} E \hat{\sigma}_0$ 을 계산.
 - 반드시 하나의 요약환경일 필요 없음.

구현 예1

자유변수가 없는 프로그램

$$E = (\text{let } x = 1 \text{ in } (\text{let } y = 2 \text{ in } (\text{let } x = 3 \text{ in } x + y))) + x$$

$$\begin{aligned} \hat{V} E \hat{\sigma} &= \hat{V} E_2 \hat{\sigma} \{x \mapsto \hat{V} 1 \hat{\sigma}\} \\ &= \hat{V} E_2 \hat{\sigma} \{x \mapsto 1\} \\ &= \dots \end{aligned}$$

- $\hat{V} E$ 는 상수함수, $\hat{\sigma}$ 와 상관없는.
- $\hat{V} E$ 는 E 의 구조를 타고 조립. 유한시간에 계산가능.

구현 예2

자유변수(입력)가 있는 프로그램

$$E = (\text{let } y = 2 \text{ in } (\text{let } x = 3 \text{ in } x + y)) + x$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{V}} E \hat{\sigma} &= (\hat{\mathcal{V}} E_1 \hat{\sigma}) + (\hat{\mathcal{V}} x \hat{\sigma}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

함수 $\hat{\mathcal{V}} E$ 는 E 의 구조를 타고 조립식으로 정의되지만, 어떤 함수일까?

- $\hat{\mathcal{V}} E \{x \mapsto \top\}$ 만 계산
- 혹은 각 경우를 모두 계산:

$$\{\hat{\mathcal{V}} E \{x \mapsto \perp\}, \hat{\mathcal{V}} E \{x \mapsto 0\}, \hat{\mathcal{V}} E \{x \mapsto +\}, \dots\}$$