

Theorem Problem

SNU 4541.664A Program Analysis

Spring 2006

Note 20

Prof. Kwangkeun Yi

집합 제약식 분석 Constraint-based Analysis

집합 제약식

집합 제약식 분석

집합 제약식을 가지고 프로그램 분석

과정

- 프로그램을 훑어서 집합 제약식들을 도출
- 도출된 집합 제약식을 푼다

다른 분석기술도 모두 이런식으로 볼 수 있으나

- 요약해석 = 제약식 도출; 풀기
- 타입시스템 = 제약식 도출; 풀기
- 등등 = 제약식 도출; 풀기

특별한 집합 제약식 분석만을 다룬다:

- 집합 제약식을 $O(n^3)$ 에 풀 수 있는 (일반적으로 NEXPTIME-complete)
- 집합 제약식을 푸는 방식이 또 다른

일반 집합 제약식

집합 제약식

$$se \supseteq se'$$

“집합식(*set expression*) se 가 의미하는 집합은 se' 가 의미하는 집합을 포함한다.”

$\varphi \in V$	집합 변수 집합
$f \in C$	구성자(<i>constructor</i>) 집합
$se \rightarrow \varphi$	집합변수
$f(se, \dots, se)$	구성
$f^{-i}(se)$	파괴
$se \cap se$	교집합
$se \cup se$	합집합
$\neg se$	여집합

프로그램 분석에 사용할 집합 제약식

집합 제약식


$$\varphi \supseteq se$$

“ φ 집합은 집합식(set expr.) se 가 의미하는 집합을 포함한다.”

$\varphi \in V$	집합 변수 집합
$f \in C$	구성자(constructor) 집합
$se \rightarrow \varphi$	집합변수
$f(\varphi, \dots, \varphi)$	구성(construction)
$f^{-i}(\varphi)$	파괴(deconstruction)
$se \cap se$	교집합
\top \perp	

프로그램으로 부터 제약식들

$$\wedge_i (\varphi_i \supseteq se_i)$$

이 나오고 풀이결과는 제약식들을 모두 만족시키는 φ_i 집합들. 

집합식의 의미 (1/2)

$\varphi \in V$	집합 변수 집합
$f \in C$	구성자(<i>constructor</i>) 집합
$se \rightarrow \varphi$	집합변수
$f(\varphi, \dots, \varphi)$	구성(<i>construction</i>)
$f^{-i}(\varphi)$	파괴(<i>deconstruction</i>)
$se \cap se$	교집합
\top \perp	

- 구성자가 필요로하는 인자수(*arity*)는 정해져 있고, 인자가 필요없는 구성자는 상수
- 집합식의 의미는 낱말(*term*)들의 집합 $\in 2^H$
- 모든 낱말(*term*) t 들의 집합 H (Herbrand universe)는

$H \ni t \rightarrow f$	상수 낱말(<i>term</i>)
$f(t, \dots, t)$	인자로 구성한 낱말(<i>term</i>)

집합식의 의미 (2/2)

$se \rightarrow \varphi$	집합변수
$f(\varphi, \dots, \varphi)$	구성 (<i>construction</i>)
$f^{-i}(\varphi)$	파괴 (<i>deconstruction</i>)
$se \cap se$	
$\top \mid \perp$	

se 의 의미 $\llbracket se \rrbracket_\sigma$ 는

$$\sigma \in V \rightarrow 2^H$$

에 기대어

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket_\sigma &= \sigma(\varphi) \\ \llbracket f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \rrbracket_\sigma &= \{f(t_1, \dots, t_n) \mid t_i \in \llbracket \varphi_i \rrbracket_\sigma\} \\ \llbracket f^{-i}(\varphi) \rrbracket_\sigma &= \{t_i \mid f(t_1, \dots, t_n) \in \llbracket \varphi \rrbracket_\sigma\} \\ \llbracket se \cap se' \rrbracket_\sigma &= \llbracket se \rrbracket_\sigma \cap \llbracket se' \rrbracket_\sigma \\ \llbracket \top \rrbracket_\sigma &= H \\ \llbracket \perp \rrbracket_\sigma &= \emptyset \end{aligned}$$

집합 제약식의 해

유한개의 연립 제약식들

$$\wedge_i(\varphi_i \supseteq se_i)$$

의 해는

$$\sigma \in V \rightarrow 2^H,$$

각 제약식들을 모두 만족시키는:

$$\wedge_i([\varphi_i]_\sigma \supseteq [se_i]_\sigma).$$

- 연립 집합 제약식 \mathcal{C} 의 해 σ 를 “모델”(model)이라고 부르고
- 이렇게 $\sigma \models \mathcal{C}$ 쓴다.

집합 제약식 해/모델

연립 집합 제약식

$$C \stackrel{\text{let}}{=} \bigwedge_i (\varphi_i \supseteq se_i)$$

의 해 $\sigma \in V \rightarrow 2^H$ 는 항상 존재:

- 쓸모없는 $\{\varphi \mapsto H \mid \varphi \in V\}$

해 중에서 가장 작은 해가 항상 존재:

- \mathcal{M} 가 모든 해들의 집합 $\mathcal{M} = \{\sigma \mid \sigma \models C\}$ 일 때, 최소의 해는

$$\bigcap \mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \mapsto \bigcap_{\sigma \in \mathcal{M}} \sigma(\varphi)\}$$

집합식 설탕: $se \Rightarrow se'$

$$\llbracket \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \rrbracket_{\sigma} = \begin{cases} \emptyset & \text{if } \llbracket \varphi_1 \rrbracket_{\sigma} = \emptyset \\ \llbracket \varphi_2 \rrbracket_{\sigma} & \text{otherwise} \end{cases}$$

따라서,

$$\begin{aligned} \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 &\equiv f^{-1}(f(\varphi_2, \varphi_1)) \\ se_1 \Rightarrow se_2 &\equiv ? \end{aligned}$$

집합 제약식 분석

- 대상 프로그래밍 언어에 적당한 집합 제약식을 정의
 - 집합변수 $\varphi \in V$ 들이 프로그램의 무엇과 연계되는지
 - 구성자(constructor) 집합 C 즉, 낱말(term) 집합 H 은 무엇이 되는지
- 프로그램으로 부터 집합 제약식 도출 방법 정의
- 도출된 집합 제약식의 해를 계산
 - 도출된 집합 제약식을 모두 참으로 만드는 $\sigma \in V \rightarrow 2^H$
 - $\sigma(\varphi)$ 를 집합 제약식들로 표현

집합 제약식 분석 예

리스트 처리 명령형 언어

$$\begin{aligned}
 c &\rightarrow x := e \\
 &| c ; c \\
 &| \text{while } e \ c \\
 &| \text{case } e \ \text{nil}: c \ \text{cons}: c \\
 e &\rightarrow n \ | \ \text{nil} \ | \ x \\
 &| \text{cons}(e, e) \\
 &| \text{car}(e) \ | \ \text{cdr}(e)
 \end{aligned}$$

분석 목표: 각 변수가 가지는 값들의 집합; 각 명령문 실행후
변수가 가지는 값들의 집합

```

x := cons(1, cons(2, nil));
y := car(x);
x := cdr(x);

```

집합 제약식 분석 예

분석 목표: 각 변수가 가지는 값들의 집합; 각 명령문 실행 후
변수가 가지는 값들의 집합

```
x := nil;
while y
  x := cons(1, x);
  y := cdr(x)
```

집합 제약식 분석 예

분석 목표: 각 변수가 가지는 값들의 집합; 각 명령문 실행 후
변수가 가지는 값들의 집합

```
x := cons(1,cons(2,nil));  
while cdr(cdr(x))  
  x := cdr(x);  
  y := car(x)
```

집합 제약식 분석 예

분석 목표: 각 변수가 가지는 값들의 집합; 각 명령문 실행 후
변수가 가지는 값들의 집합

```
case x of
  nil: y := cons(1, x)
  cons: y := cdr(x)
```

집합 제약식 분석 예

람다 함수형 언어

$$e \rightarrow n \mid x$$

$$\mid \lambda x.e \mid e e$$

각 식들이 가지는 값들의 집합:

$$(\lambda_0 x. (\lambda_1 y. y (x 1))) (\lambda_2 z. \lambda_3 w. w) (\lambda_4 a. a 2)$$

집합 제약식의 해를 구하는 알고리즘 열개

- 프로그램 pgm 을 훑어서 집합 제약식 집합 C 를 도출하는 방법

$$pgm \triangleright C$$

결정

- 집합 제약식을 풀어가는 규칙(*constraint resolving rules*)
 R 을 정의: R 은 새로운 제약식을 더해가는 규칙
- 주어진 C 에서 R 로 풀 수 있는 데 까지 푼다. 즉,

$$\text{lfp} \lambda X. C \cup \{a \mid X \vdash_R a\} \stackrel{\text{let}}{=} R^*(C)$$

를 계산.

- 해는 $R^*(C)$ 에서 각 변수 φ 의 제약식들 중에서

해는 $R^*(C)$ 에서 각 변수 φ 의 제약식들 중에서 최소 알갱이로 풀려진 제약식(*atomic constraints*)

$$\varphi \supseteq ae$$

$$ae \rightarrow \top \mid \perp$$

$$\mid f(\varphi, \dots, \varphi)$$

들로 구성된다.

해 = 문법

$R^*(C)$ 에서 φ 의 풀려진 제약식들

$$\begin{array}{l} \varphi \supseteq ae_1 \\ \vdots \\ \varphi \supseteq ae_n \end{array}$$

를 만족하는 집합 φ 는 다음의 문법이 만드는 집합이다:

$$\begin{array}{l} \varphi \rightarrow ae_1 \\ \vdots \\ | ae_n \end{array}$$

읽기

[읽을 논문] Constraint-based Analysis의 논문 4편.