

# SNU 4541.664A Program Analysis

## Note 14

Prof. Kwangkeun Yi



프로그램 분석으로서:

- 분석 성질: 프로그램 부품들이 계산해 내는 값들의 타입은?
- 분석의 안전성(*soundness*): 분석한 타입의 값만을 실행중에 계산한다.
- 분석의 알고리즘: 동일화(*unification*) 알고리즘

유의

- 타입 시스템 = 특정 성질(프로그램 타입)에 특화된 분석기
- 안전성 증명방법 = 특화된 증명기술
- 알고리즘 = 그 분석기에 특화된 알고리즘

- 타입 시스템 = 프로그램 부품들의 타입을 결정하는
  - 증명규칙/추론규칙(*inference rules, proof rules*)
- 안전성 증명방법 = 그 증명규칙들로 증명되는
  - 모든 결론은 믿을만함(*soundness*)를 증명, 즉
  - 결론대로 프로그램이 실행됨을 증명
- 알고리즘 = 증명규칙들로 만들어지는 결론과
  - 같은 결론을 계산하는 알고리즘

# 타입 시스템 = 요약해석의 한 예

모든 타입 시스템들은 요약해석(*abstract interpretation*). 따라서, 프로그램 분석에는 요약해석만 알면 된다?

- CPO, 고정점(*fixpoints*), 갈로아 연결(*Galois connection*), 축지법/좁히기(*widening/narrowing*), 고정점 알고리즘(*fixpoint algorithm*)

그러나,

- 요약해석은 우리의 종교가 아니다
- 논리적으로 문제 없는 방법이라면 뭐든지 상관없다
- 다양한 접근 방법을 익혀야
  - 타입 시스템으로 분석을 디자인 하는 장단점은 실제의 경우를 보고나서 리뷰해보자

## 형식논리와 추론

- 논리식 집합의 정의
- 논리식 의미의 정의
- 참논리식 집합의 정의
- 참논리식 추론의 방법
- 추론방법 평가하기

$$\begin{array}{l} f \rightarrow T \mid F \\ | \neg f \\ | f \wedge f \\ | f \vee f \\ | f \Rightarrow f \end{array}$$

조립식 정의 compositional definition

$$\begin{aligned} \llbracket T \rrbracket &= \text{true} \\ \llbracket F \rrbracket &= \text{false} \\ \llbracket \neg f \rrbracket &= \text{not} \llbracket f \rrbracket \\ \llbracket f_1 \wedge f_2 \rrbracket &= \llbracket f_1 \rrbracket \text{ andalso } \llbracket f_2 \rrbracket \\ \llbracket f_1 \vee f_2 \rrbracket &= \llbracket f_1 \rrbracket \text{ orelse } \llbracket f_2 \rrbracket \\ \llbracket f_1 \Rightarrow f_2 \rrbracket &= \llbracket f_1 \rrbracket \text{ implies } \llbracket f_2 \rrbracket \end{aligned}$$

임의의 논리식  $f$ 의 의미가 정의 된 셈.



# 참 논리식 집합의 정의

쌍  $(\{f_1, \dots, f_n\}, f)$  (표기: " $\Gamma \vdash f$ ") 들의 집합

$$\overline{\Gamma \vdash T} \quad \overline{\Gamma \vdash f} \quad f \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash f} \quad \frac{\Gamma \vdash \neg \neg f}{\Gamma \vdash f}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \quad \Gamma \vdash f_2}{\Gamma \vdash f_1 \wedge f_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \wedge f_2}{\Gamma \vdash f_1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1}{\Gamma \vdash f_1 \vee f_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \vee f_2 \quad \Gamma \cup \{f_1\} \vdash f_3 \quad \Gamma \cup \{f_2\} \vdash f_3}{\Gamma \vdash f_3}$$

$$\frac{\Gamma \cup \{f_1\} \vdash f_2}{\Gamma \vdash f_1 \Rightarrow f_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \Rightarrow f_2 \quad \Gamma \vdash f_1}{\Gamma \vdash f_2}$$

$$\frac{\Gamma \cup \{f\} \vdash F}{\Gamma \vdash \neg f}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f \quad \Gamma \vdash \neg f}{\Gamma \vdash F}$$

# 참논리식 집합 정의 = 증명들의 집합을 정의

증명들의 집합을 만드는 귀납규칙 (“증명규칙” inference rules).

- 예를 들어, 증명규칙

$$\frac{\Gamma \vdash f_1 \quad \Gamma \vdash f_2}{\Gamma \vdash f_1 \wedge f_2}$$

은 증명을 만드는 귀납 규칙

- $\Gamma \vdash f_1$ 와  $\Gamma \vdash f_2$ 의 증명들을 가지고  $\Gamma \vdash f_1 \wedge f_2$ 의 증명을 만든다.



# 증명 규칙의 평가

기계가 만드는  $\{g_1, \dots, g_n\} \vdash f$  는 어떤 것들인가? 예)  
 $\llbracket g_1 \wedge \dots \wedge g_n \Rightarrow f \rrbracket = \text{true}$  인가?

- 기계의 안전성 soundness:

$$\Gamma \vdash f \text{ 이면 } \llbracket \Gamma \Rightarrow f \rrbracket = \text{true}$$

- 기계의 완전성 completeness:

$$\Gamma \vdash f \text{ 면이 } \llbracket \Gamma \Rightarrow f \rrbracket = \text{true}$$

# 타입 시스템에서 논리식

논리식 = 프로그램 식과 그 타입을 표현하는 식

- 타입들은

$$\{int, real, bool, int*, int \rightarrow bool, int \times int, \dots\}$$

즉

Type	$\tau$	$\rightarrow$	$\iota$	primitive type
			$\tau \times \tau$	product type
			$\tau \rightarrow \tau$	function type
			$\tau*$	pointer type

- 프로그램 식들은 대상 언어의 문법 정의로부터

$$\begin{array}{l} E \rightarrow n \mid x \mid \&x \mid x E \\ \mid x := E \mid E ; E \\ \mid \text{while } E E \mid \dots \end{array}$$

즉, 논리식의 생김새는

$$E : \tau$$

논리식 의미의 정의

$$\llbracket E : \tau \rrbracket = \text{true}$$

*iff*

$E$  runs ok and its, if any, value has type  $\tau$

# 참인 타입식 증명 규칙

“ $\Gamma$ 안에 있는 논리식들을 가정하면  $E : \tau$  이다”

$$\Gamma \vdash E : \tau$$

를 증명하는 규칙:

$$\overline{\Gamma \vdash n : int}$$

$$\overline{\Gamma \vdash x : \tau} \quad x : \tau \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash x : \tau}{\Gamma \vdash \& x : \tau^*}$$

$$\frac{\Gamma \vdash x : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \quad \Gamma \vdash E : \tau_1}{\Gamma \vdash x E : \tau_2}$$

⋮

증명 규칙이 결론내리는(만드는)  $\Gamma \vdash E : \tau$  는 안전한가?

- 임의의 프로그램 식  $E$ 에 대해서

$$\Gamma \vdash E : \tau \text{ 이면 } \llbracket \Gamma \rrbracket \Rightarrow \llbracket E : \tau \rrbracket = \text{true}$$

인가?

- 증명: 모든  $\Gamma \vdash E : \tau$ 에 대해서 증명 (귀납법, why?)



알고리즘  $A(E, \Gamma)$

$$A(E, \Gamma) = \tau \iff \Gamma \vdash E : \tau$$

아니면 적어도

$$A(E, \Gamma) = \tau \implies \Gamma \vdash E : \tau$$

- $A(E, \Gamma)$ 는  $E$ 로 부터 타입식에 대한 연립 방정식을 도출하고 그 방정식을 푼다
- 방정식 푸는 방법이 고정점 알고리즘보다는 타입식에 특화
  - 동일화(unification) 알고리즘