Homework 2
SNU 4541.664A, 2009 봄
Due: 3/24(화), 24:00

모든 프로그래밍 숙제는 OCaml로 작성합니다.
손으로 푸는 숙제는 화요일 수업시간에 제출합니다.

Exercise 1 "계산기 `mathemadiga`"

다음의 계산기

```
mathemadiga: exp -> real
```

를 만듭시다.

```
type exp = X
         | INT of int
         | REAL of real
         | ADD of exp * exp
         | SUB of exp * exp
         | MUL of exp * exp
         | DIV of exp * exp
         | SIGMA of exp * exp * exp
         | INTEGRAL of exp * exp * exp
```

예를들어 우리가 쓰는 수식이 `exp`타입으로는 다음과 같이 표현된다:

$\sum_{x=1}^{10}(x*x-1)$	`SIGMA(INT 1, INT 10, SUB(MUL(X, X), INT 1))`
$\int_{x=1.0}^{10.0}(x*x-1)\mathrm{d}x$	`INTEGRAL(REAL 1.0, REAL 10.0, SUB(MUL(X, X), INT 1))`

적분식을 계산할때의 알갱이 크기($\mathrm{d}x$)는 0.1로 정한다.
□

Exercise 2 "Queue = 2 Stacks"

큐는 반드시 하나의 리스트일 필요는 없습니다. 두개의 리스트로 큐를 효율적으로 규현할 수 있습니다. 큐에 넣고 빼는 작업이 거의 한 스텝에 이루어질 수 있지요.

각각의 큐 연산들의 타입들은:

```
emptyQ: queue
enQ: queue * element -> queue
deQ: queue -> element * queue
```

큐를 $[a_1; \cdots; a_m; b_1; \cdots; b_n]$ 라고 합시다 (b_n이 머리). 이 큐를 두개의 리스트 L과 R로 표현할 수 있습니다:

$$L = [a_1; \cdots; a_m], \quad R = [b_n; \cdots; b_1].$$

한 원소 x를 삼키면 새로운 큐는 다음이 됩니다:

$$[x; a_1; \cdots; a_m], [b_n; \cdots; b_1].$$

원소를 하나 빼고나면 새로운 큐는 다음이 됩니다:

$$[a_1; \cdots; a_m], [b_{n-1}; \cdots; b_1].$$

뺄 때, 때때로 L 리스트를 뒤집어서 R로 같다 놔야하겠습니다. 빈 큐는 $([], [])$이겠지요.

다음과 같은 Queue 타입의 모듈을 작성합니다:

```
module type Queue =
  sig
    type element
    type queue
    exception EMPTY_Q
    val emptyQ: queue
    val enQ: queue * element -> queue
    val deQ: queue -> element * queue
  end
```

다양한 큐 모듈이 위의 Queue 타입을 만족시킬 수 있습니다. 예를들어:

```
module IntListQ =
  struct
```

```
        type element = int list
        type queue = ...
        exception EMPTY_Q
        val emptyQ = ...
        val enQ = fn ...
        val deQ = fn ...
      end
```

는 정수 리스트를 큐의 원소로 가지는 경우겠지요. 위의 모듈에서 함수 enQ와 deQ를 정의하기 바랍니다.

이 모듈에 있는 함수들을 이용해서 큐를 만드는 과정의 예는:

```
val myQ = IntListQ.emptyQ
val yourQ = IntListQ.enQ(myQ, [1])
val (x,restQ) = IntListQ.deQ yourQ
val hisQ = IntListQ.enQ(myQ, [2])
```

□

Exercise 3 집합 $T \ni t$ 는 귀납적으로 다음과 같이 정의된다:

$$t \to \cdot \mid /t,t/ \mid /t,t,t/$$

모든 $t \in T$ 는 ,와 /의 갯수에 대한 어떤 성질을 만족한다. 그 성질을 찾고 증명하라. □

Exercise 4 식들의 집합이 귀납적으로 다음과 같이 정의된다:

$$e \to x \mid e+e \mid e*e \mid e\,?\,e\,e$$

"+"와 "∗"는 각각 정수 더하기와 곱하기를 뜻하고 "$e_1\,?\,e_2\,e_3$"은 e_1의 값이 0이면 e_3의 값을, 아니면 e_2의 값을 계산한다.

다음을 증명하라: 모든 식에 대해서, 그 식에 나타나는 변수들의 값이 n의 배수이면 그 식의 값은 n의 배수이다.

Exercise 5 다음 함수들의 고정점을 찾으라:

- $\lambda x.1 \quad \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- $\lambda x.x \quad \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
- $\lambda x.x+1 \quad \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$

- $\lambda f.(\lambda x.\text{if } x = 0?0 : x + f(x-1)) \quad \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$
- $\lambda X.\{\epsilon\} \cup \{ax \mid x \in X\} \quad \in 2^S \to 2^S$ where S is the set of finite strings.

Exercise 6 Given a graph $G = (N, E)(N$ the set of nodes, $E \subseteq N \times N$ the set of edges between the nodes), the reachable set $\mathit{reach}_G(X)$ of nodes from the initial node set X can be defined as the least fixpoint of a function.

The $\mathit{reach}_G(X)$ is the smallest set S that satisfies

- $X \subseteq S$
- If $x \in S$ then $\{y \mid x \to \in E\} \subseteq S$.

Fill out the hole in the following definition:

$$\mathit{reach}_G(X) = \mathit{lfp}(\lambda S.\boxed{}).$$

$\square$