

Homework 1

SNU 4541.664A

Due: 4/6, in-class(written)

Kwangkeun Yi

Exercise 1 집합 $T \ni t$ 는 귀납적으로 다음과 같이 정의된다:

$$t \rightarrow \cdot \mid /t, t/ \mid /t, t, t/$$

모든 $t \in T$ 는 \cdot , $/$ 의 갯수에 대한 어떤 성질을 만족한다. 그 성질을 찾고 증명하라. \square

Exercise 2 식들의 집합이 귀납적으로 다음과 같이 정의된다:

$$e \rightarrow x \mid e + e \mid e * e \mid e ? e e$$

“+”와 “*”는 각각 정수 더하기와 곱하기를 뜻하고 “ $e_1 ? e_2 e_3$ ”은 e_1 의 값이 0이면 e_3 의 값을, 아니면 e_2 의 값을 계산한다.

다음을 증명하라: 모든 식에 대해서, 그 식에 나타나는 변수들의 값이 n 의 배수이면 그 식의 값은 n 의 배수이다. \square

Exercise 3 CPO D 위의 연속함수 f

$$f \in D \rightarrow D$$

의 최소 고정점이

$$\bigsqcup_{i \geq 0} f^i \perp$$

임을 증명하라. \square

Exercise 4 CPO A 에서 CPO B 로 가는 연속함수로 구성된 $A \rightarrow B$ 가 CPO임을 증명하라. \square

Exercise 5 다음 식들의 고정점을 찾아라:

- $\lambda x.1 \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- $\lambda x.x \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- $\lambda x.x + 1 \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$
- $\lambda f(\lambda x.\text{if } x = 0? 0 : x + f(x - 1)) \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$
- $\lambda X.\{\epsilon\} \cup \{ax \mid x \in X\} \in 2^S \rightarrow 2^S$ where S is the set of finite strings.

□

Exercise 6 Given a graph $G = (N, E)$ (N is the set of nodes, $E \subseteq N \times N$ the set of edges between the nodes), the reachable set $reach_G(X)$ of nodes from the initial node set X can be defined as the least fixpoint of a function.

The $reach_G(X)$ is the smallest set S that satisfies

- $X \subseteq S$
- If $x \in S$ then $\{y \mid x \rightarrow y \in E\} \subseteq S$.

Fill out the hole in the following definition:

$$reach_G(X) = fix(\lambda S. \boxed{\phantom{\lambda S. \text{some expression}}})$$

□