

SNU 4541.664A Program Analysis Note tb-4

Prof. Kwangkeun Yi

다형 타입 시스템 Polymorphic Type System

다형 타입 추론
추론 규칙의 안전성
추론 규칙의 구현

타입 분석의 정확도 올리기

단순 타입 시스템(*simple type system*)이 “잘 모르겠다”고 하는 경우를 줄여보자.

- 타입 시스템에서는

“잘 모르겠다” = “타입방정식의 해가 없다”

- 다형 타입 시스템(*polymorphic type system*)(\vdash_p)에서는 “잘 모르겠다”고 하는 경우가 적다, 단순 타입 시스템(*simple type system*)(\vdash) 보다:

$$\Gamma \vdash e : \tau \Rightarrow \Gamma \vdash_p e : \tau$$

- \vdash_p 는 \vdash 의 “conservative extension” 이라고 함.

부정확한 단순 타입 시스템

$$\frac{\frac{\vdots}{\{f : \tau \rightarrow \tau'\} \vdash f : \tau \rightarrow \tau'} \quad \frac{\vdots}{\{f : \tau \rightarrow \tau'\} \vdash f : \tau}}{\frac{\{f : \tau \rightarrow \tau'\} \vdash f f : \tau'}{\vdash \lambda f. f f : (\tau \rightarrow \tau') \rightarrow \tau'}} \quad \tau = \tau \rightarrow \tau'$$

$$\frac{\frac{\vdots}{\{f : \tau \rightarrow \tau\} \vdash f : \tau \rightarrow \tau} \quad \frac{\vdots}{\{f : \tau \rightarrow \tau\} \vdash f : \tau}}{\frac{\{f : \tau \rightarrow \tau\} \vdash f f : \tau \rightarrow \tau}{\vdash \lambda f. f f : (\tau \rightarrow \tau) \rightarrow (\tau \rightarrow \tau)}} \quad \tau = \tau \rightarrow \tau \quad \vdots$$

$$\vdash (\lambda f. f f)(\lambda x. x) : \tau \rightarrow \tau$$

타입을 일반화(*type generalization*) 시키면?

타입(분석 결과 즉, 요약해석 공간의 원소)에 정교한 것이 포함
됨:

$$\forall \alpha. \alpha \rightarrow \iota, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2. \alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \quad \dots$$

그래서

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\{f : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha\}} \vdash f : (\iota \rightarrow \iota) \rightarrow (\iota \rightarrow \iota)}{\{f : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha\}} \vdash f f : \iota}{\vdash \lambda f. f f : (\forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \iota}}{\frac{\frac{\vdots}{\{f : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha\}} \vdash f : \iota \rightarrow \iota}{\vdash \lambda x. x : \iota \rightarrow \iota}}{\vdash (\lambda f. f f)(\lambda x. x) : \iota \rightarrow \iota}}$$

이고

$$\frac{\frac{\vdots}{\vdash \lambda f. f f : (\forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\iota \rightarrow \iota)}}{\vdash (\lambda f. f f)(\lambda x. x) : \iota \rightarrow \iota}}{\frac{\vdots}{\vdash \lambda x. x : \iota \rightarrow \iota}}{\vdash (\lambda f. f f)(\lambda x. x) : \iota \rightarrow \iota}}$$

하지만 함부로 일반화를 이용하면

- 안전하지 않을 뿐더러
- 완전(*complete*)한 구현이 불가능(*undecidable*):
 - 2단(*rank 2*)이상의 다형타입(*polymorphism*)은 피해야
 - 그러나 “완전한” 면을 포기하면 불가능할 것도 없음:
프로그램분석의 기본
- 아 물론, 1단(*rank 1*) 다형타입(*polymorphism*)까지만 이용
 - 0단(*rank 0*) = 단순타입(*monomorphic types*)
 - 1단(*rank 1*) = “ \forall ” 이 제일 바깥(*prenex form*)인 다형타입

n 단 다형타입 σ^n (rank- n polymorphism)

$$\begin{aligned} \tau, \sigma^0 &::= \iota \mid \tau \rightarrow \tau \mid \alpha \\ \sigma^{n+1} &::= \sigma^n \mid \forall \alpha. \sigma^{n+1} \\ &\mid \sigma^n \rightarrow \sigma^{n+1} \end{aligned}$$

예)

$\iota \rightarrow \iota$	0단
$\forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha)$	1단
$(\forall \alpha. \alpha) \rightarrow \iota$	2단
$((\forall \alpha. \alpha) \rightarrow \iota) \rightarrow \iota$	3단

함부로 일반화하면 불안전

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \hline \{f : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \iota\} \vdash f : \iota \rightarrow \iota \quad \dots \\ \hline \{f : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \iota\} \vdash f \ 1 : \iota \quad \dots \\ \hline \{f : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \iota\} \vdash (f \ 1, f \ \text{true}) : \iota \times \iota \end{array}}{\vdash \lambda f. (f \ 1, f \ \text{true}) : (\forall \alpha. \alpha \rightarrow \iota) \rightarrow (\iota \times \iota)} \quad \frac{\vdots}{\vdash \lambda x. x + 1 : \iota \rightarrow \iota}$$

$$\frac{}{\vdash (\lambda f. (f \ 1, f \ \text{true})) (\lambda x. x + 1) : \iota \times \iota}$$

혹은

$$\frac{\vdots}{\vdash (\lambda x. (\text{let } y = x \text{ in } (y \ 1, y \ \text{true}))) (\lambda z. z + 1) : \iota \times \text{bool}}$$

다형 타입의 의미 $\gamma(\forall\alpha.\tau)$?

값들의 집합

- 모든 타입 α 에 대해서 τ 타입인 값들
- 예를들어, $\forall\alpha.\alpha \rightarrow \alpha$ 의 의미는: 인자타입에 상관없이 일을 하고 인자타입과 같은 타입의 값을 리턴하는 함수들의 집합
- 즉,

$$\gamma(\forall\alpha.\tau) = \bigcap_{t \in SimpleType} \gamma(\{t/\alpha\}\tau)$$

예를들어,

$$\begin{aligned} \gamma(\forall\alpha.\alpha \rightarrow \alpha) &= \bigcap_{t \in SimpleType} \gamma(t \rightarrow t) \\ &= \gamma(\iota \rightarrow \iota) \cap \gamma(bool \rightarrow bool) \cap \dots \\ &= \{\lambda x.x, \lambda x.1, \lambda x.x + 1, \dots\} \cap \\ &\quad \{\lambda x.x, \lambda x.(x || true), \dots\} \cap \dots \end{aligned}$$

안전한 분석 디자인: let-polymorphism 예

“Hindley-Milner style let-polymorphism”

- 프로그램이 특별히 생긴 경우만 그렇게 정교한 분석이 작동하도록
- 함수가 어디서 무슨 인자로 어떻게 사용되는 지를 알 수 있는 경우 즉,

$$(\lambda x. \underbrace{\dots x \dots x \dots})e'$$

즉,

$$\text{let } x = e' \text{ in } e$$

인 경우만

- 이 경우, e' 이 다형타입일 수 있는 지 “안전하게” 분석한 후에, e 안에서 x 가 어떻게 사용되는 지 분석.
- 다형타입은 1단(rank-1 polymorphism)까지만:

$$\iota \rightarrow \iota, \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha, \forall \alpha_1, \alpha_2. \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$$

다형 타입 추론

- 타입(*type*)과 타입틀(*type scheme*)

$$\begin{array}{l} \text{Type } \tau \rightarrow \iota \mid \tau \rightarrow \tau \mid \alpha \\ \text{TypeScheme } \sigma \rightarrow \tau \mid \forall \alpha. \sigma \end{array}$$

타입틀(*type scheme*)은 단순타입과 다형타입을 포함.
다형타입은 1단(*rank-1*)까지만 (prenex form).

- 추론규칙(*inference rules*)은 “ $\Gamma \vdash e : \tau$ ” 꼴을 유추하는 규칙들
- 가정들 Γ
 - 변수들의 타입틀(*type scheme*)에 대한 가정
 - $x + 1 : \iota$, 가정 $x : \iota$ 아래서.
 - $(f \ 1, f \ \text{true}) : \iota \times \text{bool}$, 가정 $f : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha$ 아래서

$\Gamma \vdash e : \tau$ 를 추론하는 규칙

$$\overline{\Gamma \vdash n : \iota} \quad \overline{\Gamma \vdash x : \tau} \quad \sigma \succ \tau, x : \sigma \in \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \tau \quad \Gamma + x : \text{Gen}_{\Gamma}(\tau) \vdash e' : \tau}{\Gamma \vdash \text{let } x = e \text{ in } e' : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \iota \quad \Gamma \vdash e_2 : \iota}{\Gamma \vdash e_1 + e_2 : \iota}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1 e_2 : \tau}$$

$$\frac{\Gamma + x : \tau \vdash e : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x. e : \tau \rightarrow \tau'}$$

generalization
instantiation

$$\begin{aligned} \text{Gen}_{\Gamma}(\tau) &= \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n. \tau & \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} &= \text{FTV}(\tau) \setminus \text{FTV}(\Gamma) \\ \sigma \succ \tau & & \sigma &= \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n. \tau', \tau = \{\tau_i / \alpha_i\}_i \tau' \\ \text{FTV}(\tau) &= \text{TV}(\tau) \\ \text{FTV}(\forall \alpha. \sigma) &= \text{FTV}\sigma \setminus \{\alpha\} \\ \text{FTV}(\Gamma) &= \cup_{x:\sigma \in \Gamma} \text{FTV}(\sigma) \end{aligned}$$

추론 규칙의 안전성: $Gen_{\Gamma}(\tau)$

왜 타입 τ 를 일반화 $\forall \alpha. \tau$ 시키는데 α 가 Γ 에 나타나면 제외?

$$Gen_{\Gamma}(\tau) = \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n. \tau \quad \text{여기서 } \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = FTV(\tau) \setminus FTV(\Gamma)$$

- Γ 에 가정($x : \sigma$)이 첨가 되는 경우는 $\lambda x. e$ 의 경우
- Γ 에 있는 가정을 사용하는 경우는 함수안에서 함수의 인자를 분석할 때
- 함수의 인자 타입을 일반화시키고나서 함수 내부가 분석되면 안되
- 함수가 호출되면서 전달받는 실제 인자는 일반화된 타입의 값이 아닐 수 있기 때문

예를 들어,

$$\lambda x. (\text{let } y = x \text{ in } (y \ 1, y \ \text{true}))$$

이고 이 함수가 $\lambda z. z + 1$ 에 적용되면?

추론 규칙의 안전성 증명: 추론되는 대로 실행된다

타입이 있으면 문제없이 진행:

Theorem (Progress)

$\vdash e : \tau$ 이고 e 가 값이 아니면 반드시 진행 $e \rightarrow e'$ 한다.

진행은 타입을 보존:

Theorem (Subject Reduction, Preservation)

$\vdash e : \tau$ 이고 $e \rightarrow e'$ 이면 $\vdash e' : \tau$.

추론 규칙의 구현

- 단순타입 유추 알고리즘 M 과 W 의 “자연스러운” 확장
- M_p 나 W_p 도 모두 충실한 구현. 예를들어,

안전(*sound*)

$$W_p(\Gamma, e) = (\tau, S) \Rightarrow S\Gamma \vdash e : \tau$$

완전(*complete*)

$$\left. \begin{array}{l} W_p(\Gamma, e) = (\tau, S) \\ \wedge \Gamma' = R S \Gamma \\ \wedge R(\text{Gen}_{S\Gamma}(\tau)) \succ \tau' \end{array} \right\} \Leftarrow \Gamma' \vdash e : \tau'$$

참고: “Proofs about a Folklore Let-Polymorphic Type Inference Algorithm”, Oukseh Lee and Kwangkeun Yi, *TOPLAS*, 20(4), 1998