숙제 3 해답

공순호 최원태

{soon,wtchoi}@ropas.snu.ac.kr

2009 년 4 월 13 일

3-1

$$F_w = \lambda X.\lambda M.(if\, [\![E]\!] \neq 0\; then\, X([\![C]\!]\; M)\; else\, M) \tag{1}$$

$$F_r = \lambda X.(\lambda M.(if\, [\![E]\!] \neq 0\; then\; X(M)\; else\, M) \circ [\![C]\!]) \tag{2}$$

이라고 할 때에, 증명할 성질은

$$P(fixF_w, fixF_r) \stackrel{\text{let}}{=} (\forall C, E.(fixF_w) \circ [\![C]\!] = fixF_r)$$

이다. 이 성질은 품에 넣는 성질(inclusive predicate)이므로 고정점 귀납법(fixed point induction)을 이용하여서 다음과 같이 증명한다.

- Base case: $P(\perp, \perp)$
  $\perp_{M \to M} = \lambda m.\perp_M$ 이므로 $\forall C, E.\perp_{M \to M} \circ [\![C]\!] = \perp_{M \to M}$.
  즉 $P(\perp, \perp)$ 이다.

- Inductive case: $P(f, g) \Rightarrow P(F_w f, F_r g)$
  P(f, g)를 가정하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} &\forall C, E.(\lambda M.(if\, [\![E]\!] \neq 0\; then\, ((f \circ [\![C]\!])\; M)\; else\, M)) \circ [\![C]\!] \\ &= (\lambda M.(if\, [\![E]\!] \neq 0\; then\, ((g\; M)\; else\, M)) \circ [\![C]\!] \end{aligned} \tag{3}$$

이를 이용하여 $P(F_w f, F_r g)$ 가 성립함을 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
\forall C,E.(F_w f)\circ [\![C]\!] &= (\lambda M.(\mathit{if}\,[\![E]\!] \neq 0\ \mathit{then}\ f([\![C]\!]\ M)\ \mathit{else}\ M))\circ [\![C]\!] && \text{by (1)}\\
&= (\lambda M.(\mathit{if}\,[\![E]\!] \neq 0\ \mathit{then}\ ((f\circ [\![C]\!])\ M)\ \mathit{else}\ M))\circ [\![C]\!] \\
&= (\lambda M.(\mathit{if}\,[\![E]\!] \neq 0\ \mathit{then}\ ((g\ M)\ \mathit{else}\ M))\circ [\![C]\!] && \text{by (3)}\\
&= F_r g && \text{by (2)}
\end{aligned}$$

3-2

증명할 성질은

$$P(\mathit{fix}(F\ x), \mathit{fix}(\mathit{lift}\,F)) \stackrel{\text{let}}{=} \forall x \in X, \forall a \in A\ :\ (\mathit{fix}(F\ x))\ a = (\mathit{fix}(\mathit{lift}\,F))\langle x, a\rangle$$

이고, 이 성질은 품에 넣는 성질이므로 고정점 귀납법을 이용하여서 다음과 같이 증명한다.

- Base case: $P(\bot, \bot)$

  $$\begin{aligned}
  \forall x \in X, \forall a \in A : \bot_{A\to B}\ a &= \bot_B\\
  \forall x \in X, \forall a \in A : \bot_{(X\times A)\to B}\ \langle x, a\rangle &= \bot_B
  \end{aligned}$$

  이므로 $P(\bot, \bot)$ 가 성립한다.

- Inductive case: $P(f, g) \Rightarrow P((F\ x)f, (\mathit{lift}\,F)g)$
  P(f, g) 를 가정하면 다음이 성립한다.

  $$\forall x \in X, \forall a \in A : f\ a = g\langle x, a\rangle \tag{4}$$

  또한 문제에 의해 다음이 성립한다.

  $$\forall x \in X, \forall a \in A : ((\mathit{lift}\,F)f)\langle x, a\rangle = ((F\ x)(\lambda a'.f\langle x, a'\rangle))a \tag{5}$$

  이들을 이용하여 $P((F\ x)f, (\mathit{lift}\,F)g)$ 가 성립함을 다음과 같이 보일 수 있다.

  $$\begin{aligned}
  \forall x \in X, \forall a \in A : ((\mathit{lift}\,F)g)\langle x, a\rangle &= ((F\ x)(\lambda a'.g\langle x, a'\rangle))a && \text{by (5)}\\
  &= ((F\ x)(\lambda a'.f\ a'))a && \text{by (4)}\\
  &= ((F\ x)f)a
  \end{aligned}$$