Homework2 SNU 4541.664A

2010년 3월 30일

Exercise 1 *어떤 $t(\in T)$에 대해서 t안에 존재하는 ,의 갯수를 $n_t(c)$, /의 갯수를 $n_t(s)$라고 할 때, $n_t(c) \leq n_t(s) \leq 2 \times n_t(c)$ 가 성립한다.*

Proof. t 에 대해 구조적 귀납을 적용한다.

Case t $= \cdot$: $n_t(c) = n_t(s) = 0$이므로 성립.

Case t $= /t_1$, $t_2/$: 귀납 가정에 의해서,

$$n_{t1}(c) \leq n_{t1}(s) \leq 2n_{t1}(c)$$
$$n_{t2}(c) \leq n_{t2}(s) \leq 2n_{t2}(c)$$

이 성립하고,

$$n_t(s) = n_{t1}(s) + n_{t2}(s) + 2$$
$$n_t(c) = n_{t1}(c) + n_{t2}(c) + 1$$

이므로,

$$\begin{aligned} n_{t1}(c) + n_{t2}(c) + 2 \leq & n_{t1}(s) + n_{t2}(s) + 2 \leq 2(n_{t1}(c) + n_{t2}(c) + 1) \\ n_t(c) \leq & n_t(c) + 1 \leq n_t(s) \leq 2n_t(c) \\ \therefore n_t(c) \leq & n_t(s) \leq 2n_t(c) \end{aligned}$$

Case t $= /t_1$, t_2 , $t_3/$: 귀납 가정에 의해,

$$n_{t1}(c) \leq n_{t1}(s) \leq 2n_{t1}(c)$$
$$n_{t2}(c) \leq n_{t2}(s) \leq 2n_{t2}(c)$$
$$n_{t3}(c) \leq n_{t3}(s) \leq 2n_{t3}(c)$$

이 성립하고,

$$n_t(s) = n_{t1}(s) + n_{t2}(s) + n_{t3}(s) + 2$$
$$n_t(c) = n_{t1}(c) + n_{t2}(c) + n_{t3}(c) + 2$$

이므로,

$$n_{t1}(c) + n_{t2}(c) + n_{t3}(c) + 2 \leq n_{t1}(s) + n_{t2}(s) + n_{t3}(s) + 2 \leq 2(n_{t1}(c) + n_{t2}(c) + n_{t3}(c) + 2) - 2$$
$$\therefore n_t(c) \leq n_t(s) \leq 2n_t(c)$$

□

Exercise 2 *모든 식에 대해서 그 식에 나타나는 변수들의 값이 n의 배수이면 그 식의 값은 n의 배수이다.*

Proof. $v : e \to \mathbb{N}$을 식 e를 받아 값을 내놓는 함수라고 하자.

Case e = x : trivial.

Case $e = e_1 + e_2$: 귀납 가정에 의해,

$$v(e_1) = nk_1$$
$$v(e_2) = nk_2$$
$$v(e_1 + e_2) = n(k_1 + k_2).$$

Case $e = e_1 \times e_2$: 귀납 가정에 의해,

$$v(e_1) = nk_1$$
$$v(e_2) = nk_2$$
$$v(e_1 \times e_2) = n(nk_1k_2).$$

Case $e = e_1?e_2e_3$: 귀납가정에 의해 $v(e_2)$, $v(e_3)$ 모두 n의 배수이다. $v(e)$ 는 $v(e_1)$의 값에 따라 $v(e_2)$혹은 $v(e_3)$.

$\therefore v(e)$ 는 n의 배수이다. □

Exercise 3

- 1
- $\forall z \in \mathbb{Z}$
- ∞

- $\lambda x. \frac{x(x+1)}{2}$
- $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}, \, where \, a^0 = \epsilon\}$

Exercise 4 $X \cup \{y \mid x \to y \in E, x \in S\}$