

Homework Set II Solution

안중원

November 12, 2025

문제 1

큰보폭 실행의미는 다음과 같다.

$$\begin{array}{lcl}
 x & \in & \mathbb{X} \\
 n & \in & \mathbb{Z} \\
 \sigma & \in & \mathbb{X} \xrightarrow{\text{fin}} \mathbb{V} \\
 e & \rightarrow & n \mid x \mid -e \mid \text{fn } x \, e \mid e \, e \\
 \mathbb{V} \ni v & \rightarrow & n \mid f \\
 \mathbb{F} \ni f & \rightarrow & (\text{fn } x \, e, \sigma) \\
 r & \rightarrow & v \mid \text{error}
 \end{array}$$

$$\boxed{\sigma \vdash e \Rightarrow r}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{EV-INT} \\
 \hline
 \sigma \vdash n \Rightarrow n
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{EV-VAR} \\
 x \in \text{dom } \sigma \\
 \hline
 \sigma \vdash x \Rightarrow \sigma x
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{EV-NEG} \\
 \sigma \vdash e \Rightarrow n \\
 \hline
 \sigma \vdash -e \Rightarrow -n
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{EV-FN} \\
 \hline
 \sigma \vdash \text{fn } x \, e \Rightarrow (\text{fn } x \, e, \sigma)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{EV-APP} \\
 \sigma \vdash e_1 \Rightarrow (\text{fn } x \, e', \sigma') \quad \sigma \vdash e_2 \Rightarrow v \quad \sigma' \{x \mapsto v\} \vdash e' \Rightarrow r \\
 \hline
 \sigma \vdash e_1 \, e_2 \Rightarrow r
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{ERR-VAR} \\
 x \notin \text{dom } \sigma \\
 \hline
 \sigma \vdash x \Rightarrow \text{error}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{ERR-NEG} \\
 \sigma \vdash e \Rightarrow r \quad r \notin \mathbb{Z} \\
 \hline
 \sigma \vdash -e \Rightarrow \text{error}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{ERR-APP-1} \\
 \sigma \vdash e_1 \Rightarrow r \quad r \notin \mathbb{F} \\
 \hline
 \sigma \vdash e_1 \, e_2 \Rightarrow \text{error}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{ERR-APP-2} \\
 \sigma \vdash e_2 \Rightarrow \text{error} \\
 \hline
 \sigma \vdash e_1 \, e_2 \Rightarrow \text{error}
 \end{array}$$

실행전의미는 다음과 같다.

$$\begin{array}{lcl}
 \mathbb{T} \ni \tau & \rightarrow & \text{int} \mid \tau \rightarrow \tau \\
 \Gamma & \in & \mathbb{X} \xrightarrow{\text{fin}} \mathbb{T}
 \end{array}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash e : \tau}$$

$$\begin{array}{c}
\text{T-INT} \\
\hline
\Gamma \vdash n : \text{int}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\text{T-VAR} \\
\hline
\frac{x \in \text{dom } \Gamma}{\Gamma \vdash x : \Gamma x}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\text{T-NEG} \\
\hline
\frac{\Gamma \vdash e : \text{int}}{\Gamma \vdash -e : \text{int}}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\text{T-FN} \\
\hline
\frac{\Gamma\{x \mapsto \tau'\} \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash \text{fn } x e : \tau' \rightarrow \tau}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{T-APP} \\
\hline
\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau' \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1 e_2 : \tau}
\end{array}$$

“실행 결과가 타입을 따름” 관계는 다음과 같이 τ 의 구조에 대한 귀납법으로 정의된다.

$$\begin{aligned}
r \sim \text{int} &\iff r \in \mathbb{Z} \\
r \sim (\tau' \rightarrow \tau) &\iff (r = \langle \text{fn } x e, \sigma \rangle \in \mathbb{F}) \wedge \\
&\quad (\forall v r. (v \sim \tau') \wedge (\sigma\{x \mapsto v\} \vdash e \Rightarrow r) \implies r \sim \tau)
\end{aligned}$$

“실행 환경이 타입 환경을 따름” 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma \sim \Gamma \iff \forall x \in \text{dom } \Gamma. (x \in \text{dom } \sigma) \wedge (\sigma x \sim \Gamma x)$$

정리 1 (실행전의미의 안전성). 타입 검사된 닫힌 식을 빈 환경에서 실행하면 그 결과는 타입을 따른다.

$$\forall e \tau r. (\vdash e : \tau) \wedge (\vdash e \Rightarrow r) \implies (r \sim \tau)$$

Proof. $\Gamma = \emptyset, \sigma = \emptyset$ 이면 $\sigma \sim \Gamma$ 이 성립하므로 아래의 보조정리 1에서 바로 따른다. $\square$

보조정리 1 (실행전의미의 일반적 안전성). 타입 검사된 식을 타입 환경을 따르는 환경에서 실행하면 그 결과는 타입을 따른다.

$$\forall e \Gamma \tau \sigma r. (\Gamma \vdash e : \tau) \wedge (\sigma \sim \Gamma) \wedge (\sigma \vdash e \Rightarrow r) \implies (r \sim \tau)$$

Proof. e 의 구조에 대한 귀납법으로 증명한다.

- $e = n$. T-INT에 의해 $\tau = \text{int}$.
 $\sigma \vdash n \Rightarrow r$ 가 성립하는 경우는 EV-INT뿐이므로 $r \in \mathbb{Z}$, 즉 $r \sim \text{int}$.
- $e = x$. T-VAR에 의해 $\tau = \Gamma x, x \in \text{dom } \Gamma$.
 $x \in \text{dom } \Gamma$ 이므로 $\sigma \sim \Gamma$ 에 의해 $x \in \text{dom } \sigma$ 이고 $\sigma x \sim \Gamma x$.
 $x \in \text{dom } \sigma$ 이므로 $\sigma \vdash x \Rightarrow r$ 가 성립하는 경우는 EV-VAR뿐이다.
따라서 $r = \sigma x$ 이고 위에서 보였듯 $\sigma x \sim \Gamma x$.
- $e = -e'$. T-NEG에 의해 $\tau = \text{int}, \Gamma \vdash e' : \text{int}$.
귀납가정에 의해 $\sigma \vdash e' \Rightarrow r' \implies r' \sim \text{int}$.
즉 $r' \in \mathbb{Z}$ 이므로 $\sigma \vdash -e' \Rightarrow r$ 가 성립하는 경우는 EV-NEG뿐이다.
 $r = -r' \in \mathbb{Z}$ 이므로 $r \sim \text{int}$.

- $e = \text{fn } x e'$. T-FN에 의해 $\tau = \tau'' \rightarrow \tau'$, $\Gamma\{x \mapsto \tau''\} \vdash e' : \tau'$.
 $\sigma \vdash \text{fn } x e' \Rightarrow r$ 가 성립하는 경우는 EV-FN뿐이므로 $r = (\text{fn } x e', \sigma)$.
이제 $\langle \text{fn } x e', \sigma \rangle \sim (\tau'' \rightarrow \tau')$ 를 보이기 위해
 $(v \sim \tau'') \wedge (\sigma\{x \mapsto v\} \vdash e' \Rightarrow r')$ 를 가정하고 $r' \sim \tau'$ 를 보인다.
 $\sigma\{x \mapsto v\} \sim \Gamma\{x \mapsto \tau''\}$ 이므로 e' 에 대한 귀납가정에 의해 $r' \sim \tau'$.
- $e = e_1 e_2$. T-APP에 의해 $\Gamma \vdash e_1 : \tau' \rightarrow \tau$, $\Gamma \vdash e_2 : \tau'$.
귀납가정에 의해 $\sigma \vdash e_1 \Rightarrow r_1$ 이면 $r_1 \sim (\tau' \rightarrow \tau)$, 즉 $r_1 = (\text{fn } x e', \sigma') \in \mathbb{F}$.
또 귀납가정에 의해 $\sigma \vdash e_2 \Rightarrow r_2$ 이면 $r_2 \sim \tau'$, 즉 $r_2 \in \mathbb{V}$.
따라서 $\sigma \vdash e_1 e_2 \Rightarrow r$ 가 성립하는 경우는 EV-APP뿐이다.
 $\sigma'\{x \mapsto r_2\} \vdash e' \Rightarrow r$ 이므로 $\langle \text{fn } x e', \sigma' \rangle \sim \tau' \rightarrow \tau$ 에 의해 $r \sim \tau$.

□

문제 2

추가되는 큰보폭 실행의미는 다음과 같다.

$$\begin{array}{l} e \rightarrow \dots \mid (e, e) \mid e.1 \mid e.2 \\ \mathbb{V} \ni v \rightarrow \dots \mid \langle v, v \rangle \end{array}$$

$\frac{\text{EV-PAIR} \quad \sigma \vdash e_1 \Rightarrow v_1 \quad \sigma \vdash e_2 \Rightarrow v_2}{\sigma \vdash (e_1, e_2) \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle}$	$\frac{\text{EV-FST} \quad \sigma \vdash e \Rightarrow \langle v, v' \rangle}{\sigma \vdash e.1 \Rightarrow v}$	$\frac{\text{EV-SND} \quad \sigma \vdash e \Rightarrow \langle v', v \rangle}{\sigma \vdash e.2 \Rightarrow v}$
$\frac{\text{ERR-PAIR-1} \quad \sigma \vdash e_1 \Rightarrow \text{error}}{\sigma \vdash (e_1, e_2) \Rightarrow \text{error}}$	$\frac{\text{ERR-PAIR-2} \quad \sigma \vdash e_2 \Rightarrow \text{error}}{\sigma \vdash (e_1, e_2) \Rightarrow \text{error}}$	
$\frac{\text{ERR-FST} \quad \sigma \vdash e \Rightarrow r \quad r \notin \mathbb{V} \times \mathbb{V}}{\sigma \vdash e.1 \Rightarrow \text{error}}$	$\frac{\text{ERR-SND} \quad \sigma \vdash e \Rightarrow r \quad r \notin \mathbb{V} \times \mathbb{V}}{\sigma \vdash e.2 \Rightarrow \text{error}}$	

추가되는 실행전의미는 다음과 같다.

$$\mathbb{T} \ni \tau \rightarrow \dots \mid \tau \times \tau$$

$\frac{\text{T-PAIR} \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash (e_1, e_2) : \tau_1 \times \tau_2}$	$\frac{\text{T-FST} \quad \Gamma \vdash e : \tau \times \tau'}{\Gamma \vdash e.1 : \tau}$	$\frac{\text{T-SND} \quad \Gamma \vdash e : \tau' \times \tau}{\Gamma \vdash e.2 : \tau}$
---	---	---

“실행 결과가 타입을 따름” 관계는 다음과 같이 확장된다.

$$r \sim \tau_1 \times \tau_2 \iff r = \langle v_1, v_2 \rangle \wedge v_1 \sim \tau_1 \wedge v_2 \sim \tau_2$$

안전성 증명은 다음과 같이 확장된다.

Proof. ...

- $e = (e_1, e_2)$. T-PAIR에 의해 $\tau = \tau_1 \times \tau_2$, $\Gamma \vdash e_1 : \tau_1$, $\Gamma \vdash e_2 : \tau_2$.
귀납가정에 의해 $\sigma \vdash e_1 \Rightarrow r_1$ 이면 $r_1 \sim \tau_1$, 즉 $r_1 \in \mathbb{V}$.
또 귀납가정에 의해 $\sigma \vdash e_2 \Rightarrow r_2$ 이면 $r_2 \sim \tau_2$, 즉 $r_2 \in \mathbb{V}$.
따라서 $\sigma \vdash (e_1, e_2) \Rightarrow r$ 가 성립하는 경우는 EV-PAIR뿐이다.
 $r = \langle r_1, r_2 \rangle$ 이므로 $r \sim \tau_1 \times \tau_2$.
- $e = e'.1$. T-FST에 의해 $\Gamma \vdash e' : \tau \times \tau'$.
귀납가정에 의해 $\sigma \vdash e' \Rightarrow r'$ 이면 $r' \sim \tau \times \tau'$, 즉 $r = \langle v, v' \rangle$, $v \sim \tau$, $v' \sim \tau'$.
따라서 $\sigma \vdash e'.1 \Rightarrow r$ 가 성립하는 경우는 EV-FST뿐이다.
 $r = v$ 이므로 위에서 보였듯이 $v \sim \tau$.
- $e = e'.2$. $e = e'.1$ 의 경우와 유사하게 증명된다.

□

문제 3

추가되는 큰보폭 실행의미는 다음과 같다.

$$\begin{array}{lcl} e & \rightarrow & \dots \mid \text{inl } e \mid \text{inr } e \mid \text{case } e \text{ (inl } x:e) \text{ (inr } x:e) \\ \mathbb{V} \ni v & \rightarrow & \dots \mid \text{inl } v \mid \text{inr } v \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{EV-INL} \\ \frac{\sigma \vdash e \Rightarrow v}{\sigma \vdash \text{inl } e \Rightarrow \text{inl } v} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{EV-INR} \\ \frac{\sigma \vdash e \Rightarrow v}{\sigma \vdash \text{inr } e \Rightarrow \text{inr } v} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{EV-CASE-INL} \\ \frac{\sigma \vdash e \Rightarrow \text{inl } v \quad \sigma\{x \mapsto v\} \vdash e_1 \Rightarrow r}{\sigma \vdash \text{case } e \text{ (inl } x:e_1) \text{ (inr } y:e_2) \Rightarrow r} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{EV-CASE-INR} \\ \frac{\sigma \vdash e \Rightarrow \text{inr } v \quad \sigma\{y \mapsto v\} \vdash e_2 \Rightarrow r}{\sigma \vdash \text{case } e \text{ (inl } x:e_1) \text{ (inr } y:e_2) \Rightarrow r} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{ERR-INL} \\ \frac{\sigma \vdash e \Rightarrow \text{error}}{\sigma \vdash \text{inl } e \Rightarrow \text{error}} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{ERR-INR} \\ \frac{\sigma \vdash e \Rightarrow \text{error}}{\sigma \vdash \text{inr } e \Rightarrow \text{error}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{ERR-CASE} \\ \frac{\sigma \vdash e \Rightarrow r \quad r \notin \mathbb{V} + \mathbb{V}}{\sigma \vdash \text{case } e \text{ (inl } x:e_1) \text{ (inr } y:e_2) \Rightarrow \text{error}} \end{array}$$

추가되는 실행전의미는 다음과 같다.

$$\mathbb{T} \ni \tau \rightarrow \dots \mid \tau + \tau$$

$$\begin{array}{c}
\text{T-INL} \\
\frac{\Gamma \vdash e : \tau_1}{\Gamma \vdash \text{inl } e : \tau_1 + \tau_2} \\
\\
\text{T-INR} \\
\frac{\Gamma \vdash e : \tau_2}{\Gamma \vdash \text{inr } e : \tau_1 + \tau_2} \\
\\
\text{T-CASE} \\
\frac{\Gamma \vdash e : \tau_1 + \tau_2 \quad \Gamma\{x \mapsto \tau_1\} \vdash e_1 : \tau \quad \Gamma\{y \mapsto \tau_2\} \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \text{case } e \text{ (inl } x : e_1) \text{ (inr } y : e_2) : \tau}
\end{array}$$

“실행 결과가 타입을 따름” 관계는 다음과 같이 확장된다.

$$r \sim \tau_1 + \tau_2 \iff (r = \text{inl } v \wedge v \sim \tau_1) \vee (r = \text{inr } v \wedge v \sim \tau_2)$$

안전성 증명은 다음과 같이 확장된다.

Proof. ...

- $e = \text{inl } e'$. T-INL에 의해 $\tau = \tau_1 + \tau_2, \Gamma \vdash e' : \tau_1$.
귀납가정에 의해 $\sigma \vdash e' \Rightarrow r'$ 이면 $r' \sim \tau_1$, 즉 $r' \in \mathbb{V}$.
따라서 $\sigma \vdash \text{inl } e' \Rightarrow r$ 가 성립하는 경우는 EV-INL뿐이다.
 $r = \text{inl } r'$ 이므로 $r \sim \tau_1 + \tau_2$.
- $e = \text{inr } e'$. $e = \text{inl } e'$ 의 경우와 유사하게 증명된다.
- $e = \text{case } e_0 \text{ (inl } x : e_1) \text{ (inr } y : e_2)$. T-CASE에 의해
 $\Gamma \vdash e_0 : \tau_1 + \tau_2, \Gamma\{x \mapsto \tau_1\} \vdash e_1 : \tau, \Gamma\{y \mapsto \tau_2\} \vdash e_2 : \tau$.
귀납가정에 의해 $\sigma \vdash e_0 \Rightarrow r_0$ 이면 $r_0 \sim \tau_1 + \tau_2$,
즉 $(r_0 = \text{inl } v \wedge v \sim \tau_1) \vee (r_0 = \text{inr } v \wedge v \sim \tau_2)$.
따라서 $\sigma \vdash e_0 \Rightarrow r_0$ 가 성립하는 경우는 다음 둘 중 하나이다.
 - $r_0 = \text{inl } v \wedge v \sim \tau_1$. EV-CASE-INL에 의해 $\sigma\{x \mapsto v\} \vdash e_1 \Rightarrow r$.
 $\sigma\{x \mapsto v\} \sim \Gamma\{x \mapsto \tau_1\}$ 이므로 e_1 에 대한 귀납가정에 의해 $r \sim \tau$.
 - $r_0 = \text{inr } v \wedge v \sim \tau_2$. 위의 경우와 유사하게 증명된다.

□