Homework 3

권민정

November 11, 2025

1 단순 타입 유추 알고리즘 M의 안전성을 증명하라.

문제 정의

$$\begin{array}{rcl} E & \rightarrow & n \mid x \mid \mathsf{fn}\, x\, E \mid E\, E \mid E + E \\ \tau & \rightarrow & \mathsf{int} \mid \tau \rightarrow \tau \mid \alpha(\text{타입 변수}) \\ \Gamma & \in & \mathsf{Var} \rightarrow \tau \\ S & \in & Subst = \alpha \rightarrow \tau \end{array}$$

동일화 알고리즘 unify

$$\mathsf{unify}(\tau, \tau') \in Subst$$

$$\mathsf{unify}(\tau, \tau) = \emptyset \tag{1a}$$

$$\mathsf{unify}(\alpha, \tau) = \begin{cases} \{\tau/\alpha\} & \text{if } \alpha \notin \mathsf{FV}(\tau) \\ \mathsf{fail} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1b}$$

$$\mathsf{unify}(\tau, \alpha) = \begin{cases} \{\tau/\alpha\} & \text{if } \alpha \notin \mathsf{FV}(\tau) \\ \mathsf{fail} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1c}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{unify}(\tau_1 \rightarrow \tau_2, \tau_1' \rightarrow \tau_2') = \mathsf{let}\ & S = \mathsf{unify}(\tau_1, \tau_1') \\ & S' = \mathsf{unify}(S\tau_2, S\tau_2') \\ \mathsf{in}\ & S'S \end{aligned} \tag{1d}$$

$$\mathsf{unify}(\_, \_) = \mathsf{fail} \tag{1e}$$

실행 전 의미 (Static Semantics)

$$\varGamma \vdash E : \tau \quad (\text{“타입 환경 } \varGamma \text{에서 } E \text{는 } \tau \text{ 타입이다”})$$

$$\frac{}{\varGamma \vdash n : \mathsf{int}}\ \textsc{T-Num} \qquad \frac{x : \tau \in \varGamma}{\varGamma \vdash x : \tau}\ \textsc{T-Var} \qquad \frac{\varGamma + x : \tau_1 \vdash E : \tau_2}{\varGamma \vdash \mathsf{fn}\, x\, E : \tau_1 \to \tau_2}\ \textsc{T-Fun}$$

$$\frac{\varGamma \vdash E_1 : \tau_1 \to \tau_2 \quad \varGamma \vdash E_2 : \tau_1}{\varGamma \vdash E_1 E_2 : \tau_2}\ \textsc{T-App} \qquad \frac{\varGamma \vdash E_1 : \mathsf{int} \quad \varGamma \vdash E_2 : \mathsf{int}}{\varGamma \vdash E_1 + E_2 : \mathsf{int}}\ \textsc{T-Add}$$

타입 추론 M 알고리즘

$$M : \mathit{TyEnv} \times \mathit{Exp} \times \mathit{Type} \to \mathit{Subst}$$

$$\begin{aligned}
M(\varGamma, n, \tau) &= \mathsf{unify}(\mathsf{int}, \tau) && && \text{(M-Num)}\\
M(\varGamma, x, \tau) &= \mathsf{unify}(\tau, \tau') \quad \mathsf{if}\ x : \tau' \in \varGamma && && \text{(M-Var)}\\
M(\varGamma, \mathsf{fn}\, x\, E, \tau) &= \mathsf{let}\ S = \mathsf{unify}(\alpha_1 \to \alpha_2, \tau) && \mathsf{new}\ \alpha_1, \alpha_2 &&\\
&\qquad S' = M(S\varGamma + x : S\alpha_1, E, S\alpha_2) && &&\\
&\quad \mathsf{in}\ S'S && && \text{(M-Fun)}\\
M(\varGamma, EE', \tau) &= \mathsf{let}\ S = M(\varGamma, E, \alpha \to \tau) && \mathsf{new}\ \alpha &&\\
&\qquad S' = M(S\varGamma, E', S\alpha) && &&\\
&\quad \mathsf{in}\ S'S && && \text{(M-App)}\\
M(\varGamma, E + E', \tau) &= \mathsf{let}\ S = \mathsf{unify}(\mathsf{int}, \tau) && &&\\
&\qquad S' = M(S\varGamma, E, \mathsf{int}) && &&\\
&\qquad S'' = M(S'S\varGamma, E', \mathsf{int}) && &&\\
&\quad \mathsf{in}\ S''S'S && && \text{(M-Add)}
\end{aligned}$$

M 알고리즘의 안전성을 증명하기 위해 Substitution Lemma, Unification Lemma 두 개의 보조 정리를 사용한다.

Lemma 1 (Substitution Lemma)**.** $\varGamma \vdash E : \tau \Rightarrow S\varGamma \vdash E : S\tau$

Proof. E에 대한 구조적 귀납법으로 증명한다.

- $E = n$
  T-Num에서 $\tau = \mathsf{int}$, $S\mathsf{int} = \mathsf{int}$ 이므로, $S\Gamma \vdash n : S\mathsf{int}$ 이다.

- $E = x$
  T-Var에서 $x : \tau \in \Gamma$ 이고, $\Gamma \vdash x : \tau$ 이다. 따라서 $x : S\tau \in S\Gamma$ 이고, $S\Gamma \vdash x : S\tau$ 이다.

- $E = \mathsf{fn}\, x\, E'$
  T-Fun에서 $\tau = \tau_1 \to \tau_2$, $\Gamma + x : \tau_1 \vdash E' : \tau_2$ 이고, 귀납 가정에 의해 $S(\Gamma + x : \tau_1) \vdash E' : S\tau_2$ 이다. $S(\Gamma + x : \tau_1) = S\Gamma + x : S\tau_1$ 이므로, $S\Gamma + x : S\tau_1 \vdash E' : S\tau_2$ 이다. 따라서 T-Fun에 의해 $S\Gamma \vdash \mathsf{fn}\, x\, E' : S\tau_1 \to S\tau_2$ 이다.

- $E = E_1 E_2$
  T-App에서 $\tau = \tau_2$, $\Gamma \vdash E_1 : \tau_1 \to \tau_2$, $\Gamma \vdash E_2 : \tau_1$ 이고, 귀납 가정에 의해 각각 $S\Gamma \vdash E_1 : S(\tau_1 \to \tau_2)$, $S\Gamma \vdash E_2 : S\tau_1$ 이다. $S(\tau_1 \to \tau_2) = S\tau_1 \to S\tau_2$ 이므로, $S\Gamma \vdash E_1 : S\tau_1 \to S\tau_2$ 이다. 따라서 T-App에 의해 $S\Gamma \vdash E_1 E_2 : S\tau_2$ 이다.

- $E = E_1 + E_2$
  T-Add에서 $\tau = \mathsf{int}$, $\Gamma \vdash E_1 : \mathsf{int}$, $\Gamma \vdash E_2 : \mathsf{int}$ 이고, 귀납 가정에 의해 각각 $S\Gamma \vdash E_1 : S\mathsf{int}$, $S\Gamma \vdash E_2 : S\mathsf{int}$ 이다. $S\mathsf{int} = \mathsf{int}$ 이므로, $S\Gamma \vdash E_1 : \mathsf{int}$, $S\Gamma \vdash E_2 : \mathsf{int}$ 이다. 따라서 T-Add에 의해 $S\Gamma \vdash E_1 + E_2 : \mathsf{int}$ 이다.

∎

Lemma 2 (Unification lemma). $\mathsf{unify}(\tau, \tau') = S \;\Rightarrow\; S\tau = S\tau'$

Proof. 가정에서 $\mathsf{unify}(\tau, \tau')$ 가 유한하게 끝났으므로, $\mathsf{unify}(\tau, \tau')$ 의 유도과정에서 재귀적으로 호출되는 unify의 유도는 $\mathsf{unify}(\tau, \tau')$ 의 유도에 포함된다. 따라서 unify의 유도과정의 각 경우에 대한 귀납법을 사용하여 증명한다.

- $\mathsf{unify}(\tau, \tau) = \emptyset$
  자명하게 $\emptyset\tau = \tau$ 이므로, 성립한다.

- $\mathsf{unify}(\alpha, \tau') = \{\tau'/\alpha\}$
  $\{\tau'/\alpha\}\alpha = \tau'$ 이고, $\{\tau'/\alpha\}\tau' = \tau'$ 이므로, 성립한다.

- $\mathsf{unify}(\tau, \alpha) = \{\tau/\alpha\}$
  위와 마찬가지로 $\{\tau/\alpha\}\alpha = \tau$ 이고, $\{\tau/\alpha\}\tau = \tau$ 이므로, 성립한다.

- $\mathsf{unify}(\tau_1 \to \tau_2, \tau_1' \to \tau_2') = S$
  가정에서 다음을 얻는다.

$$S = S_2 S_1 \tag{2a}$$

$$S_1 = \mathsf{unify}(\tau_1, \tau_1') \tag{2b}$$

$$S_2 = \mathsf{unify}(S_1\tau_2, S_1\tau_2') \tag{2c}$$

  (2b), (2c)에 귀납 가정을 적용하면 각각 다음을 얻는다.

$$S_1\tau_1 = S_1\tau_1' \tag{3a}$$

$$S_2S_1\tau_2 = S_2S_1\tau_2' \tag{3b}$$

  자명하게 (3a)이면 $S_2S_1\tau_1 = S_2S_1\tau_1'$ 이므로, (3b)와 함께 $S\tau_1 = S\tau_1'$, $S\tau_2 = S\tau_2'$ 이다. 따라서 $S(\tau_1 \to \tau_2) = S\tau_1 \to S\tau_2 = S\tau_1' \to S\tau_2' = S(\tau_1' \to \tau_2')$ 이다.

■

Theorem 3 (M 알고리즘의 안전성). $M(\Gamma, E, \tau) = S \;\Rightarrow\; S\Gamma \vdash E : S\tau$

Proof. E 에 대한 구조적 귀납법으로 증명한다.

- $E = n$
  가정인 $M(\Gamma, n, \tau) = S$ 에 대해 M-Num을 적용하면 다음을 얻는다.

$$S = \mathsf{unify}(\mathsf{int}, \tau) \tag{4}$$

  (4)에 대해 Lemma 2를 적용하면 $S\tau = S\mathsf{int} = \mathsf{int}$ 이다. T-Num에서 $S\Gamma \vdash n : \mathsf{int}$ 이므로, $S\Gamma \vdash E : S\tau$ 가 성립한다.

- $E = x$
  가정인 $M(\Gamma, x, \tau) = S$ 에 대해 M-Var을 적용하면 다음을 얻는다.

$$S = \mathsf{unify}(\tau, \tau') \tag{5a}$$

$$x : \tau' \in \Gamma \tag{5b}$$

  (5b)에 의해 $x : S\tau' \in S\Gamma$ 이므로, T-Var에서 $S\Gamma \vdash x : S\tau'$ 이다.
  (5a)에 대해 Lemma 2를 적용하면 $S\tau = S\tau'$ 이므로, $S\Gamma \vdash x : S\tau$ 이다.
  따라서, $S\Gamma \vdash E : S\tau$ 가 성립한다.

- $E = \mathsf{fn}\, x\, E'$
  가정인 $M(\Gamma, \mathsf{fn}\, x\, E', \tau) = S$ 에 대해 M-Fun을 적용하면 다음을 얻는다.

$$S = S_2 S_1 \tag{6a}$$

$$S_1 = \mathsf{unify}(\alpha_1 \to \alpha_2, \tau) \qquad \text{new } \alpha_1, \alpha_2 \tag{6b}$$

$$S_2 = M(S_1\Gamma + x : S_1\alpha_1, E', S_1\alpha_2) \tag{6c}$$

E' 에 대해 귀납 가정을 적용하면 (6c)로부터

$$S_2(S_1\Gamma + x : S_1\alpha_1) \vdash E' : S_2S_1\alpha_2 \tag{7}$$

가 성립한다.

$S_2(S_1\Gamma + x : S_1\alpha_1) = S_2S_1\Gamma + x : S_2S_1\alpha_1$ 이므로 (7)과 T-Fun에 의해 다음을 얻는다.

$$S_2S_1\Gamma \vdash \mathsf{fn}\, x\, E' : S_2S_1\alpha_1 \to S_2S_1\alpha_2 \tag{8}$$

(6b)에 대해 Lemma 2를 적용하면 $S_1\tau = S_1(\alpha_1 \to \alpha_2)$ 이므로, $S\tau = S_2S_1\tau = S_2S_1(\alpha_1 \to \alpha_2) = S_2S_1\alpha_1 \to S_2S_1\alpha_2$ 이다. 따라서 (8)에서 $S\Gamma \vdash E : S\tau$ 가 성립한다.

- $E = E_1E_2$
  가정인 $M(\Gamma, E_1E_2, \tau) = S$ 에 대해 M-App을 적용하면 다음을 얻는다.

$$S = S_2S_1 \tag{9a}$$

$$S_1 = M(\Gamma, E_1, \alpha \to \tau) \qquad \text{new } \alpha \tag{9b}$$

$$S_2 = M(S_1\Gamma, E_2, S_1\alpha) \tag{9c}$$

E_1, E_2 에 대해 귀납 가정을 적용하면 각각 (9b), (9c)로부터

$$S_1\Gamma \vdash E_1 : S_1(\alpha \to \tau) \tag{10a}$$

$$S_2S_1\Gamma \vdash E_2 : S_2S_1\alpha \tag{10b}$$

가 성립한다.

(10a)에 대해 Lemma 1을 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$S_2S_1\Gamma \vdash E_1 : S_2S_1(\alpha \to \tau) \tag{11}$$

$S_2S_1(\alpha \to \tau) = S_2S_1\alpha \to S_2S_1\tau$ 이므로 (11)와 (10b)에 T-App를 적용하여 다음을 얻는다.

$$S_2S_1\Gamma \vdash E_1E_2 : S_2S_1\tau \tag{12}$$

따라서 (9a)과 (12)에 의해 $S\Gamma \vdash E : S\tau$ 가 성립한다.

- $E = E_1 + E_2$
  가정인 $M(\Gamma, E_1 + E_2, \tau) = S$ 에 대해 M-Add을 적용하면 다음을 얻는다.

$$S = S_3S_2S_1 \tag{13a}$$

$$S_1 = \mathsf{unify}(\mathsf{int}, \tau) \tag{13b}$$

$$S_2 = M(S_1\Gamma, E_1, \mathsf{int}) \tag{13c}$$

$$S_3 = M(S_2S_1\Gamma, E_2, \mathsf{int}) \tag{13d}$$

E_1, E_2 에 대해 귀납 가정을 적용하면 각각 (13c), (13d)로부터

$$S_2 S_1 \Gamma \vdash E_1 : S_2 S_1 \mathsf{int} \tag{14a}$$

$$S_3 S_2 S_1 \Gamma \vdash E_2 : S_3 S_2 S_1 \mathsf{int} \tag{14b}$$

가 성립한다.

(14a)에 대해 Lemma 1을 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$S_3 S_2 S_1 \Gamma \vdash E_1 : S_3 S_2 S_1 \mathsf{int} \tag{15}$$

자명하게 $S_3 S_2 S_1 \mathsf{int} = \mathsf{int}$ 이므로, (14b)와 (15)에 T-ADD를 적용하여 다음을 얻는다.

$$S_3 S_2 S_1 \Gamma \vdash E_1 + E_2 : \mathsf{int} \tag{16}$$

(13b)에 Lemma 2를 적용하면 $S_1 \tau = S_1 \mathsf{int}$ 이다. $S\tau = S_3 S_2 S_1 \tau = S_3 S_2 S_1 \mathsf{int} = \mathsf{int}$ 이다. 따라서 (16)과 (13a)에 의해 $S\Gamma \vdash E : S\tau$ 가 성립한다.

■

2 단순 타입 유추 알고리즘 W의 안전성을 증명하라.

타입 추론 W 알고리즘

$$W : TyEnv \times Exp \to Type \times Subst$$

$$
\begin{aligned}
W(\Gamma, n) &= (\mathsf{int}, \emptyset) && \text{(W-NUM)}\\
W(\Gamma, x) &= (\tau, \emptyset) \quad \mathsf{if}\ x : \tau \in \Gamma && \text{(W-VAR)}\\
W(\Gamma, \mathsf{fn}\, x\, E) &= \mathsf{let}\ (\tau, S) = W(\Gamma + x : \alpha, E) && \mathsf{new}\ \alpha\\
&\quad\ \mathsf{in}\ (S\alpha \to \tau, S) && \text{(W-FUN)}\\
W(\Gamma, EE') &= \mathsf{let}\ (\tau, S) = W(\Gamma, E)\\
&\qquad (\tau', S') = W(S\Gamma, E')\\
&\qquad S'' = \mathsf{unify}(\tau' \to \alpha, S'\tau) && \mathsf{new}\ \alpha\\
&\quad\ \mathsf{in}\ (S''S'S, S''\alpha) && \text{(W-APP)}\\
W(\Gamma, E + E') &= \mathsf{let}\ (\tau, S) = W(\Gamma, E)\\
&\qquad S' = \mathsf{unify}(\tau, \mathsf{int})\\
&\qquad (\tau', S'') = W(S'S\Gamma, E')\\
&\qquad S''' = \mathsf{unify}(\tau', \mathsf{int})\\
&\quad\ \mathsf{in}\ (\mathsf{int}, S'''S''S'S) && \text{(W-ADD)}
\end{aligned}
$$

Theorem 4 (W 알고리즘의 안전성). $W(\Gamma, E) = (\tau, S) \ \Rightarrow\ S\Gamma \vdash E : \tau$

Proof. M 알고리즘과 마찬가지로 E에 대한 구조적 귀납법으로 증명한다.

- $E = n$
  가정인 $W(\mathit{\Gamma}, n) = (\tau, S)$에 대해 W-Num을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\tau = \mathsf{int}, \quad S = \emptyset \tag{17}$$

  T-Num에 의해 $S\mathit{\Gamma} \vdash n : \mathsf{int}$이다. 따라서 $S\mathit{\Gamma} \vdash E : \tau$가 성립한다.

- $E = x$
  가정인 $W(\mathit{\Gamma}, x) = (\tau, S)$에 대해 W-Var을 적용하면 $S = \emptyset$, $x : \tau \in \mathit{\Gamma}$ 이고, $S\mathit{\Gamma} = \mathit{\Gamma}$이므로 $x : \tau \in S\mathit{\Gamma}$이다. 따라서 T-Var에 의해 $S\mathit{\Gamma} \vdash E : \tau$ 가 성립한다.

- $E = \mathsf{fn}\, x\, E'$
  가정인 $W(\mathit{\Gamma}, \mathsf{fn}\, x\, E') = (\tau, S)$에 대해 W-Fun을 적용하면 다음을 얻는다.

$$(\tau_1, S_1) = W(\mathit{\Gamma} + x : \alpha, E') \qquad \text{new } \alpha \tag{18a}$$
$$\tau = S_1\alpha \to \tau_1 \tag{18b}$$
$$S = S_1 \tag{18c}$$

  E'에 대해 귀납 가정을 적용하면 (18a)로부터

$$S_1(\mathit{\Gamma} + x : \alpha) \vdash E' : \tau_1 \tag{19}$$

  가 성립한다.
  $S_1(\mathit{\Gamma} + x : \alpha) = S_1\mathit{\Gamma} + x : S_1\alpha$이므로 (19)과 T-Fun에 의해 다음을 얻는다.

$$S_1\mathit{\Gamma} \vdash \mathsf{fn}\, x\, E' : S_1\alpha \to \tau_1 \tag{20}$$

  따라서 (18b), (18c)에 의해 (20)에서 $S\mathit{\Gamma} \vdash E : \tau$가 성립한다.

- $E = E_1E_2$
  가정인 $W(\mathit{\Gamma}, E_1E_2) = (\tau, S)$에 대해 W-App을 적용하면 다음을 얻는다.

$$(\tau_1, S_1) = W(\mathit{\Gamma}, E_1) \tag{21a}$$
$$(\tau_2, S_2) = W(S_1\mathit{\Gamma}, E_2) \tag{21b}$$
$$S_3 = \mathsf{unify}(\tau_2 \to \alpha, S_2\tau_1) \qquad \text{new } \alpha \tag{21c}$$
$$\tau = S_3\alpha \tag{21d}$$
$$S = S_3S_2S_1 \tag{21e}$$

E_1, E_2 에 대해 귀납 가정을 적용하면 각각 (21a), (21b)로부터

$$S_1\mathit{\Gamma} \vdash E_1 : \tau_1 \tag{22a}$$
$$S_2S_1\mathit{\Gamma} \vdash E_2 : \tau_2 \tag{22b}$$

가 성립한다.
(22)에 대해 Lemma 1을 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$S_3S_2S_1\mathit{\Gamma} \vdash E_1 : S_3S_2\tau_1 \tag{23a}$$
$$S_3S_2S_1\mathit{\Gamma} \vdash E_2 : S_3\tau_2 \tag{23b}$$

Lemma 2에 의해 $S_3(S_2\tau_1) = S_3(\tau_2 \to \alpha) = S_3\tau_2 \to S_3\alpha$ 이다. 그러므로 (23)에 T-App를 적용하면 $S_3S_2S_1\mathit{\Gamma} \vdash E_1E_2 : S_3\alpha$ 이다.
따라서 (21d), (21e)에 의해 $S\mathit{\Gamma} \vdash E : \tau$ 가 성립한다.

- $E = E_1 + E_2$
  가정인 $W(\mathit{\Gamma}, E_1 + E_2) = (\tau, S)$ 에 대해 W-Add을 적용하면 다음을 얻는다.

$$(\tau_1, S_1) = W(\mathit{\Gamma}, E_1) \tag{24a}$$
$$S_2 = \mathsf{unify}(\tau_1, \mathsf{int}) \tag{24b}$$
$$(\tau_3, S_3) = W(S_2S_1\mathit{\Gamma}, E_2) \tag{24c}$$
$$S_4 = \mathsf{unify}(\tau_3, \mathsf{int}) \tag{24d}$$
$$\tau = \mathsf{int} \tag{24e}$$
$$S = S_4S_3S_2S_1 \tag{24f}$$

E_1, E_2 에 대해 귀납 가정을 적용하면 각각 (24a), (24c)로부터

$$S_1\mathit{\Gamma} \vdash E_1 : \tau_1 \tag{25a}$$
$$S_3S_2S_1\mathit{\Gamma} \vdash E_2 : \tau_3 \tag{25b}$$

가 성립한다.
(25a)에 대해 Lemma 1을 적용하면 $S_4S_3S_2S_1\mathit{\Gamma} \vdash E_1 : S_4S_3S_2\tau_1$ 을 얻을 수 있다. Lemma 2에 의해 $S_2\tau_1 = S_2\mathsf{int} = \mathsf{int}$ 이므로, $S_4S_3\mathsf{int} = \mathsf{int}$ 를 이용하여 이를 다시 쓰면 다음을 얻을 수 있다.

$$S_4S_3S_2S_1\mathit{\Gamma} \vdash E_1 : \mathsf{int} \tag{26}$$

마찬가지로 (25b)에 대해 Lemma 1을 적용하면 $S_4S_3S_2S_1\mathit{\Gamma} \vdash E_2 : S_4\tau_3$ 을 얻을 수 있다. Lemma 2에 의해 $S_4\tau_3 = S_4\mathsf{int} = \mathsf{int}$ 이므로, 이를 다시 쓰면 다음을 얻을 수 있다.

$$S_4S_3S_2S_1\mathit{\Gamma} \vdash E_2 : \mathsf{int} \tag{27}$$

마지막으로 (26), (27)에 T-Add를 적용하여 다음을 얻는다.

$$S_4 S_3 S_2 S_1 \Gamma \vdash E_1 + E_2 : \mathsf{int} \tag{28}$$

따라서 (24e), (24f)에 의해 $S\Gamma \vdash E : \tau$가 성립한다.

■