

# Homework 1

SNU 4541.664A

**Due: 4/3, 24:00(program),  
in-class(written)**

Kwangkeun Yi

- 프로그램 속제는 OCaml로 작성하는 것을 권장합니다. 다른 언어로 구현할 경우, 속제의 spec해 해당하는 것을 해당언어로 번역해서 제출하세요.
- 비 프로그램 속제는 수업시간에 제출하세요.

**Exercise 1** 집합  $T \ni t$ 는 귀납적으로 다음과 같이 정의된다:

$$t \rightarrow \cdot \mid /t,t/ \mid /t,t,t/$$

모든  $t \in T$ 는 ,와 /의 갯수에 대한 어떤 성질을 만족한다. 그 성질을 찾고 증명하라. □

**Exercise 2** 식들의 집합이 귀납적으로 다음과 같이 정의된다:

$$e \rightarrow x \mid e + e \mid e * e \mid e ? e e$$

“+”와 “\*”는 각각 정수 더하기와 곱하기를 뜻하고 “ $e_1 ? e_2 e_3$ ”은  $e_1$ 의 값이 0이면  $e_3$ 의 값을, 아니면  $e_2$ 의 값을 계산한다.

다음을 증명하라: 모든 식에 대해서, 그 식에 나타나는 변수들의 값이  $n$ 의 배수이면 그 식의 값은  $n$ 의 배수이다. □

**Exercise 3** CPO  $D$ 위의 연속함수  $f$

$$f \in D \rightarrow D$$

의 최소 고정점이

$$\bigsqcup_{i \geq 0} f^i \perp$$

임을 증명하라. □

**Exercise 4** CPO  $A$ 에서 CPO  $B$ 로 가는 연속함수로 구성된  $A \rightarrow B$ 가 CPO임을 증명하라. □

**Exercise 5** 다음 식들의 고정점을 찾아라:

- $\lambda x.1 \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- $\lambda x.x \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- $\lambda x.x + 1 \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$
- $\lambda f(\lambda x.\text{if } x = 0? 0 : x + f(x - 1)) \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$
- $\lambda X.\{\epsilon\} \cup \{ax \mid x \in X\} \in 2^S \rightarrow 2^S$  where  $S$  is the set of finite strings.

□

**Exercise 6** Given a graph  $G = (N, E)$  ( $N$  is the set of nodes,  $E \subseteq N \times N$  the set of edges between the nodes), the reachable set  $\text{reach}_G(X)$  of nodes from the initial node set  $X$  can be defined as the least fixpoint of a function.

The  $\text{reach}_G(X)$  is the smallest set  $S$  that satisfies

- $X \subseteq S$
- If  $x \in S$  then  $\{y \mid x \rightarrow y \in E\} \subseteq S$ .

Fill out the hole in the following definition:

$$\text{reach}_G(X) = \text{lfp}(\lambda S. \boxed{\phantom{\text{reach}_G(X)}})$$

□

**Exercise 7** 수업시간에 고정점귀납법 (fixpoint induction)의 예(repeat-명령문과 while-명령문의 의미관련)를 보였다. 그 증명을 완성하라. □

**Exercise 8** 수업시간에 다룬 간단한 명령형 언어인 KMINUS.cmd 타입의 프로그램 받아서 아래의 의미식 타입 SEM.exp의 식으로 변환하는 프로그램을

$$\text{semantics} : \text{KMINUS.cmd} \rightarrow \text{SEM.exp}$$

을 작성하라:

```

module type KMINUS =
sig
  exception Error of string
  type id = string
  type exp = NUM of int
            | VAR of id
            | ADD of exp * exp
            | MINUS of exp
  type cmd = SKIP
            | SEQ of cmd * cmd           (* sequence *)
            | IF of exp * cmd * cmd      (* if-then-else *)
            | ASSIGN of id * exp        (* assign to variable *)
            | WHILE of exp * cmd        (* while loop *)
end

module type SEM =
sig
  type id = string
  type exp = VAR of id
            | NUM of int
            | LAM of id * exp           /* continuous function */
            | APP of exp * exp         /* function application */
            | IF of exp * exp * exp    /* if-then-else operator */
            | FIX of exp               /* fix operator */
            | NOTEQZ of exp            /* not-equal-zero operator */
            | ADD of exp * exp         /* binary + operator */
            | MINUS of exp            /* unary - operator */
            | UPDATE of exp * id * exp /* function update operator */
end

```

□