퀴즈1 답안

조교 안중원

2026년 10월 7일

Exercise 1 식들의 집합이 귀납적으로 다음과 같이 정의된다.

$$e ::= x \mid e + e \mid e \,?\, e\; e.$$

"+"는 정수 더하기를 뜻하고, "$e_1 \,?\, e_2\; e_3$"은 e_1의 값이 0이면 e_3의 값을, 아니면 e_2의 값을 계산한다.

다음을 증명하라: 모든 식에 대해서, 그 식에 나타나는 변수들의 값이 n의 배수이면 그 식의 값은 n의 배수이다.

답 정수 n을 고정하고 주어진 명제를 식 e의 구조에 대한 귀납법으로 증명한다.

- $e = x$**.** 가정에 의해 x의 값은 n의 배수이다.
- $e = e_1 + e_2$**.** e에 나타나는 변수가 모두 n의 배수 값이므로, e_1과 e_2에 나타나는 변수도 모두 n의 배수 값을 갖는다. 귀납 가정에 의해 e_1과 e_2의 값은 모두 n의 배수이다. 따라서 그 합인 $e_1 + e_2$의 값도 n의 배수이다.
- $e = e_1 \,?\, e_2\;\; e_3$**.** 덧셈의 경우와 마찬가지로, e_2와 e_3의 값도 모두 n의 배수이다. e_1의 값이 0이면 e_3의 값이, 아니면 e_2의 값이 계산되므로, e의 값은 항상 n의 배수이다.

따라서 모든 식에 대해 주어진 명제가 성립한다. □

Exercise 2 집합 S에 대해서 그 부분집합들의 집합 2^S의 원소들 사이의 부분순서(partial order) $\sqsubseteq$를 부분집합 순서 $\subseteq$로 하면, 최소윗뚜껑(least upper bound)은 합집합과 같고 가장 작은 원소는 $\emptyset$인 CPO로 볼 수 있다.

어떤 연속함수

$$f \in 2^S \to 2^S$$

를 생각하자. 이 함수는 다음 두 성질을 만족한다고 가정하자: $f(\emptyset) = \emptyset$ 그리고 $\forall x, y \in 2^S : f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$.

다음을 증명하라: $A \in 2^S$라고 하고, 최소 고정점

$$\mathrm{fix}(\lambda x.A \cup f(x)) = \bigcup_{i \geq 0} f^i(A).$$

답 고정점을 구하는 함수를 $g := \lambda x.A \cup f(x)$라고 두고, 우변 $\alpha := \bigcup_{i \geq 0} f^i(A)$가 g의 최소 고정점임을 보이면 된다.

1. α가 g의 고정점이라는 것, 즉 $g(\alpha) = \alpha$임을 보인다.

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= A \cup f\left(\bigcup_{i \geq 0} f^i(A)\right) \\ &= A \cup \bigcup_{i \geq 0} f^{i+1}(A) \\ &= f^0(A) \cup \bigcup_{i \geq 1} f^i(A) \\ &= \bigcup_{i \geq 0} f^i(A) = \alpha. \end{aligned}$$

2. α가 고정점 중 최소라는 것, 즉 g의 다른 고정점 β가 주어졌을 때 $\alpha \subseteq \beta$임을 보인다. 이때 $\alpha = \bigcup_{i \geq 0} f^i(A)$이므로 모든 $i \geq 0$에 대해 $f^i(A) \subseteq \beta$임을 보이면 충분하다. 증명은 i에 대한 귀납법으로 진행한다.

   - $i = 0$.

$$\begin{aligned} f^0(A) = A &\subseteq A \cup f(\beta) \\ &= g(\beta) \\ &= \beta \qquad (\beta\text{는 } g\text{의 고정점}). \end{aligned}$$

   - $i = k$일 때 $f^k(A) \subseteq \beta$라고 가정하자. f는 연속함수이므로 또한 단조함수(monotone)이다. 따라서

$$\begin{aligned} f^{k+1}(A) &= f(f^k(A)) \\ &\subseteq f(\beta) \qquad (f\text{의 단조성}) \\ &\subseteq A \cup f(\beta) \\ &= g(\beta) \\ &= \beta \qquad (\beta\text{는 } g\text{의 고정점}). \end{aligned}$$

따라서 α는 g의 최소 고정점이다. □

Exercise 3 다음 연속함수들의 최소 고정점(least fixpoint)을 찾아라.

1. $\lambda x.1 \in \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$.
2. $\lambda x.x \in \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$.
3. $\lambda f.(\lambda x.\text{if } x = 0\text{? } 0 : x + f(x-1)) \in (\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp) \to (\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp)$.
   $+$함수와 $-$함수는 엄격(strict)하다. 즉, 인자가 하나라도 $\perp$이면 $\perp$을 낸다.

답 $\text{fix}(F) = \bigsqcup_{i \geq 0} F^i(\perp)$이라는 사실을 이용하여 최소 고정점을 구할 수 있다.

1. $\text{fix}(\lambda x.1) = 1$.

$$\begin{aligned} F^0(\perp) &= \perp, \\ F^1(\perp) &= 1, \\ F^2(\perp) &= 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

2. $\text{fix}(\lambda x.x) = \perp$.

$$\begin{aligned} F^0(\perp) &= \perp, \\ F^1(\perp) &= \perp, \\ &\vdots \end{aligned}$$

3. $\text{fix}(\lambda f.(\lambda x.\text{if } x = 0\text{? } 0 : x + f(x-1))) = \lambda x. \begin{cases} \perp & x = \perp, \\ \sum_{i=1}^{x} i & x \in \mathbb{N}. \end{cases}$

$$\begin{aligned} F^0(\lambda x.\perp) &= \lambda x.\perp, \\ F^1(\lambda x.\perp) &= \lambda x. \begin{cases} 0 & x = 0, \\ \perp & \text{otherwise}, \end{cases} \\ F^2(\lambda x.\perp) &= \lambda x. \begin{cases} 0 & x = 0, \\ 1+0 & x = 1, \\ \perp & \text{otherwise}, \end{cases} \\ F^3(\lambda x.\perp) &= \lambda x. \begin{cases} 0 & x = 0, \\ 1+0 & x = 1, \\ 2+1+0 & x = 2, \\ \perp & \text{otherwise}, \end{cases} \\ &\vdots \end{aligned}$$

   x가 자연수일 때는 $F^{x-1}(\perp)$ 이후로 값이 고정되고, $\perp$일 때는 항상 $\perp$이다.

Exercise 4 다음과 같이 변수가 하나만 있는 명령형 언어를 생각하자.

$$C ::= \texttt{skip} \mid \texttt{store}\ E \mid C; C \mid C\ \texttt{or}\ C,$$
$$E ::= n \mid \texttt{load} \mid E + E \mid -E.$$

다음 프로그램의 의미를 아래 두 의미구조의 정의에 따라 쓰고 정리하라.

$$\texttt{store}\ 3;\ (\texttt{store}\ (-\texttt{load})\ \texttt{or}\ (\texttt{store}\ (5 + \texttt{load}))).$$

답

$$\begin{aligned}
&[\![\texttt{store}\ 3;\ (\texttt{store}\ (-\texttt{load})\ \texttt{or}\ (\texttt{store}\ (5 + \texttt{load})))]\!] S \\
&= [\![\texttt{store}\ (-\texttt{load})\ \texttt{or}\ (\texttt{store}\ (5 + \texttt{load}))]\!]\ ([\![\texttt{store}\ 3]\!] S) \\
&= [\![\texttt{store}\ (-\texttt{load})\ \texttt{or}\ (\texttt{store}\ (5 + \texttt{load}))]\!]\ \{3\} \\
&= [\![\texttt{store}\ (-\texttt{load})]\!]\ \{3\}\ \cup\ [\![\texttt{store}\ (5 + \texttt{load})]\!]\ \{3\} \\
&= [\![-\texttt{load}]\!]\ \{3\}\ \cup\ [\![5 + \texttt{load}]\!]\ \{3\} \\
&= -[\![\texttt{load}]\!]\ \{3\}\ \cup\ ([\![5]\!]\ \{3\}\ \dot{+}\ [\![\texttt{load}]\!]\ \{3\}) \\
&= -\{3\}\ \cup\ (\{5\}\ \dot{+}\ \{3\}) \\
&= \{-3, 8\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[\![\texttt{store}\ 3;\ (\texttt{store}\ (-\texttt{load})\ \texttt{or}\ (\texttt{store}\ (5 + \texttt{load})))]\!]^{\#} s^{\#} \\
&= [\![\texttt{store}\ (-\texttt{load})\ \texttt{or}\ (\texttt{store}\ (5 + \texttt{load}))]\!]^{\#} ([\![\texttt{store}\ 3]\!]^{\#} s^{\#}) \\
&= [\![\texttt{store}\ (-\texttt{load})\ \texttt{or}\ (\texttt{store}\ (5 + \texttt{load}))]\!]^{\#} 1 \\
&= [\![\texttt{store}\ (-\texttt{load})]\!]^{\#} 1\ \cup^{\#}\ [\![\texttt{store}\ (5 + \texttt{load})]\!]^{\#} 1 \\
&= [\![-\texttt{load}]\!]^{\#} 1\ \cup^{\#}\ ([\![5 + \texttt{load}]\!]^{\#} 1) \\
&= [\![\texttt{load}]\!]^{\#} 1\ \cup^{\#}\ ([\![5]\!]^{\#} 1\ +^{\#}\ [\![\texttt{load}]\!]^{\#} 1) \\
&= 1\ \cup^{\#}\ (1\ +^{\#}\ 1) \\
&= \top.
\end{aligned}$$